

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РФ
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего образования
«Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского»
Национальный исследовательский университет

Любимов А.К.

Введение в теорию надёжности: проектно-ориентированный подход

Учебно-методическое пособие

Рекомендовано методической комиссией механико-математического факультета, центром инновационных образовательных технологий (Центр «Тюнинг») ИЭП для студентов, обучающихся по направлениям подготовки 010800 «Механика и математическое моделирование», 010400 «Прикладная математика и информатика»

Нижний Новгород
2014

УДК 539.3
ББК В181
Л 93

Материалы подготовлены в соответствии с планом работ по реализации дорожной карты ННГУ на 2013 – 2014 гг.

Задача 1.2. Внедрение современных педагогических технологий в учебный процесс

Мероприятие 1.2.1. Формирование учебно-методических материалов для проектно-ориентированного обучения (project based learning) по разным направлениям обучения

Любимов А.К. Введение в теорию надёжности: проектно-ориентированный подход: Учебно-методическое пособие. Нижний Новгород, 2014. – 176 с.

В пособии представлены разработки занятий по курсу «Введение в теорию надёжности», созданного в соответствии с Федеральным государственным образовательным стандартом по направлениям подготовки магистров 010800 «Механика и математическое моделирование», 010400 «Прикладная математика и информатика».

Пособие содержит подробное описание организации проектно-ориентированного обучения на занятиях и их структуру.

Учебно-методическое пособие предназначено для организации активной самостоятельной работы студентов над учебным материалом при изучении дисциплины «Теория надёжности», как в аудитории, так и вне аудитории.

Консультант: доцент, к.х.н. Грудзинская Е.Ю.

Ответственные за выпуск:

председатель методической комиссии механико-математического факультета

доц. Денисова Н.А., руководитель центра инновационных образовательных технологий (Центр «Тюнинг») ИЭП проф. А.К. Любимов

УДК 539.3

ББК В181

© А.К. Любимов

© Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского, 2014

Содержание

| | | Стр. |
|---|---|------|
| | Введение | 5 |
| | Цели освоения дисциплины «Введение в теорию надёжности» | 8 |
| 1 | Цели и задачи теории надёжности. | 13 |
| | Занятие 1 Историческая справка. Цели и задачи теории надёжности. Основные составляющие. Системная и параметрическая теория надёжности. Прогнозирование ресурса. Вероятностный характер параметров конструкций, внешних воздействий и прочих факторов. Экономические аспекты надёжности. | 13 |
| 2 | Терминология. | 22 |
| | Занятие 2 Государственный стандарт. Понятие надёжности, безотказности, долговечности. Работоспособное, предельное состояния. Отказ, виды отказов | 23 |
| | Занятие 3 Показатели безотказности, долговечности: наработка, ресурс, другие временные характеристики, интенсивность отказов, вероятность безотказной работы. Зависимости между показателями безотказности Статистические оценки показателей по результатам испытаний. | 42 |
| 3 | Общая теория надёжности. | 67 |
| | Занятие 4 Понятие пространств качества, нагрузки, состояния. Математическая формулировка задачи надёжности. | 67 |
| | Занятие 5 Процесс накопления необратимых повреждений, ведущих к отказу. Уравнение накопления повреждений. | 72 |
| 4 | Надёжность объектов до первого отказа. | 74 |
| | Занятие 6 Экспоненциальный закон надёжности, другие используемые законы. | 74 |
| 5 | Надёжность объектов при внезапных отказах. | 90 |
| | Занятие 7 Модель оценки вероятности безотказной работы при однократном воздействии (модель «нагрузка-прочность»). | 90 |
| | Занятие 8 Экспоненциальная модель внезапных отказов | 98 |
| | Занятие 9 Прогнозирование вероятности безотказной работы в случае, когда внешнее воздействие задается потоком независимых дискретных воздействий. | 107 |
| | Занятие 10 Надёжность объекта при случайных | 112 |

| | | |
|---|---|-----|
| | воздействиях, описываемых непрерывным случайным процессом | |
| 6 | Надежность объектов при постепенных отказах. | 116 |
| | Занятие 11 Нахождение вероятности безотказной работы объекта в случае линейного закона накопления повреждений | 116 |
| | Занятие 12 Прогнозирование времени достижения предельного состояния объекта при использовании различных видов уравнения накопления повреждений. | 124 |
| | Занятие 13 Совместное проявление внезапных и постепенных отказов | 130 |
| 7 | Надёжность систем. | 134 |
| | Занятие 14 Система и её характеристики | 137 |
| | Занятие 15 Определение вероятности безотказной работы системы с последовательным соединением элементов | 146 |
| | Занятие 16 Определение вероятности безотказной работы системы с параллельным соединением элементов. Система с нагруженным резервом. | 152 |
| | Занятие 17 Определение вероятности безотказной работы системы с параллельным соединением элементов. Система с ненагруженным резервом | 160 |
| | Занятие 18 Применение формулы Байеса для расчёта надёжности систем | 169 |
| | Заключение | 175 |
| | Литература | 176 |

ВВЕДЕНИЕ

Переход высшего профессионального образования на многоуровневую систему подготовки (бакалавр-магистр-аспирант), внедрение компетентного подхода ставит перед преподавателем вуза новые задачи: прежде всего, предоставление образовательных услуг соответствующих новым целям и задачам. Современным требованиям должны отвечать содержание, методы проведения занятий, средства обучения и контроля. Все перечисленное определяет взаимосвязанные задачи, которые должен решить преподаватель при разработке учебного курса и подготовке к конкретному занятию.

В принятых в 2009–2010 гг. Федеральных государственных образовательных стандартах (ФГОС) третьего поколения отмечена необходимость внедрения активных методов в вузовский учебный процесс для повышения качества образования, мотивации к обучению у студентов и повышения ответственности студентов за результаты их обучения, а также повышения эффективности учебного процесса в целом.

Проектная деятельность, наряду с научно-исследовательской, научно-производственной, организационной и преподавательской, в ФГОС зафиксирована. Как основной вид профессиональной деятельности, к которой должен быть готов выпускник вуза. Формирование проектной компетенции подготавливаемого специалиста становится одной из первостепенных целей обучения. Формирование данной компетенции достигается в процессе проектирования самостоятельной деятельности студентов по созданию субъективно или объективно нового материального или идеального объекта, основанного на взаимосвязи теории и практики, системном подходе к решению проблемы, комплексном представлении таких процессов как моделирование, планирование. Прогнозирование. Проектная деятельность может быть организована как в рамках учебных занятий, проводимых с использованием активных методов. Так и при выполнении различных проектов в аудиторной и внеаудиторной работе.

Цель проектного обучения - создание условий, при которых студенты мотивированы на приобретение знаний из различных доступных источников; пользуются приобретёнными знаниями для решения познавательных и практических задач; приобретают коммуникативные навыки, работая в группах постоянного и/или переменного состава; развивают критическое мышление. Учебный процесс проектируется преподавателем как специально организованный и самостоятельно выполняемый студентами комплекс действий, завершающих создание творческого продукта.

Характерными чертами учебного процесса в проектно-ориентированных методах являются: обучение в деятельности; возможность гибкого изменения

содержания обучения; построение процесса обучения не только в соответствии с логикой предметов, но и с логикой развития деятельности; изменение роли преподавателя – преподаватель становится организатором учебного процесса; применение активных методов ведения занятий; наличие постоянной обратной связи; студенческая работа организована в группах; использование аутентичных методов оценивания (когда оценивается не только результат деятельности обучаемого, но и процесс получения знаний). Всё перечисленное – характеристики учебного процесса, «ориентированного на студента» в отличие от традиционного обучения.

Реализация компетентного подхода приводит к кардинальному изменению организации учебного процесса, что отражено в разделе «Требования к условиям осуществления образовательных программ» ФГОС. Для повышения эффективности формирования и развития общекультурных и профессиональных компетенций предлагается 30% аудиторных занятий в рамках образовательной программы проводить в активных и интерактивных формах.

Активные методы проведения занятий меняют всю систему отношений в учебном процессе: «преподаватель – студент», «студент – учебный материал», «студент – другие студенты». Студент нацелен на конструктивный диалог с преподавателем и студентами, способность высказывать и отстаивать свою точку зрения, самодиагностику и самооценку, открытость новой информации, всесторонний анализ и осмысление информации, выявление особенностей, остающихся недоступными при беглом восприятии информации. Такой характер работы позволяет развивать и формировать общекультурные и профессиональные компетенции, повышает эффективность образовательного процесса в целом.

При неизменном объеме содержательной части темы чтение лекций заменяется самостоятельным освоением материала студентами в аудитории под руководством преподавателя, активным обсуждением учебного материала. Преподаватель изменяет методы обучения, переходя от репродуктивных к частично-поисковым и проблемно-поисковым методам; меняет форму организации занятий – групповая работа сочетается с индивидуальной и фронтальной формами.

В пособии предлагается организация активной самостоятельной работы студентов над учебным материалом, как в аудитории, так и вне аудитории при изучении дисциплины «Введение в теорию надёжности» на основе выстраивания занятий в технологии развития критического мышления через чтение и письмо (ТРКМЧП) [1].

Использование на занятии тех или иных приемов и стратегий технологии обуславливается особенностями изучаемого материала и преследуемыми целями. В данной технологии занятие (или его часть) имеет трехфазную

структуру «Вызов – Осмысление – Рефлексия». Разделение этих стадий до некоторой степени условны. Поэтому, чтобы более четко представлять себе такое деление, определим задачи, решаемые на каждой стадии.

Задача «Вызов» включает

- актуализацию имеющихся знаний учащихся по обсуждаемой теме;
- пробуждение познавательного интереса;
- помощь в определении направления изучения темы (ориентация).

Задача «Осмысление» включает

- помощь в активном восприятии материала;
- помощь в соотнесении старых и новых знаний;

Задача «Рефлексия» включает

- помощь в обобщении изучаемого материала;
- помощь в определении направлений дальнейшего изучения материала.

Таким образом для каждого занятия обязательно выделяются три фазы: «Вызов», «Осмысление» и «Рефлексия». Если же занятие состоит из нескольких смысловых блоков материала, то эти фазы выделяются в каждом блоке.

На занятиях, как правило, сочетается групповая и индивидуальная работа студентов. Следовательно, большое внимание следует уделить организации работы групп. Как правило выделяются группы по 3-6 человек. Группы организуются в начале каждого занятия, причем лучше использовать группы сменного состава. Это поможет каждому студенту максимально проявить свои способности, попробовать работать в разных качествах, научиться строить деловые взаимоотношения с различными людьми.

Следует отметить, что далеко не каждое занятие по дисциплине «Введение в теорию надёжности» целесообразно целиком выстраивать в технологии ТРКМЧП. Для некоторых разделов курса изучение материала оптимально проводить традиционными методами (доказательство теорем, введение моделей). В этих случаях следует рекомендовать использование лишь отдельных приемов технологии ТРКМЧП.

При выборе стратегии обучения ведущим должен являться *принцип единства содержания и метода*. Технологии и методы обучения должны обеспечивать усвоение содержания предмета, блока и каждой конкретной темы, а не являться самоцелью.

Описанию организации работы студентов над учебным материалом предшествует изложение целей курса в терминах результатов его освоения. Исходя из поставленных целей разработано тематическое планирование курса, описаны, определяемые целями и содержанием дисциплины, технологии обучения.

Цели освоения дисциплины «Введение в теорию надёжности»

Основной целью дисциплины «Введение в теорию надёжности» является изучение закономерностей изменения показателей качества технических систем, формирование и развитие навыков проведения расчетов механических конструкций и организации испытаний на надежность.

Содержание дисциплины направлено на ознакомление слушателей с основными понятиями и подходами, применяемыми в теории надежности механических систем, методами оценки вероятности безотказной работы объектов в случае внезапных и постепенных отказов.

В учебном плане подготовки магистров по направлению подготовки магистров 010800 «Механика и математическое моделирование» дисциплина находится в блоке профессиональных дисциплин в базовой части М2.Ф1.

Для успешного освоения программы дисциплины слушатели должны владеть знаниями в объёме курсов теории вероятностей и математической статистики, теории случайных процессов, механика материалов, математические модели механики сплошной среды, строительная механика, экспериментальная механика.

Требования к результатам освоения дисциплины.

Процесс изучения дисциплины направлен на формирование следующих компетенций:

- способностью работать в междисциплинарной команде (ОК-1);
- способностью общаться со специалистами из других областей (ОК-2);
- владением методами математического и алгоритмического моделирования при анализе проблем техники и естествознания (ПК-2);
- способностью создавать и исследовать новые математические модели реальных тел и конструкций (ПК-4);
- способностью к самостоятельному построению целостной картины дисциплины (ПК-13);
- владением методами физического и математического моделирования при анализе глобальных проблем на основе глубоких знаний фундаментальных физико-математических дисциплин, теории эксперимента и компьютерных наук (ПК-14);

В результате освоения дисциплины обучающийся должен:
знать

- основные понятия, идеи и методы теории надежности и их применение для решения типовых задач;
- современные представления о формулировках и методах исследования характерных задач теории надежности механических систем.
- основы методов проведения испытаний для получения оценок показателей надежности.

уметь

- использовать модели и методы теории надежности для нахождения эффективных решений прикладных задач широкого профиля

владеть:

- применением методик качественного анализа надёжности сложных технических систем;
- применением количественных методов анализа оценки характеристик надёжности объектов.

Структура и содержание дисциплины

Общая трудоемкость дисциплины составляет 3 зачетных единицы 108 часов.

| № п/п | Раздел Дисциплины | Семестр | Неделя семестра | Виды учебной работы, включая самостоятельную работу студентов и трудоемкость (в часах) | | | | Формы текущего контроля успеваемости (<i>по неделям семестра</i>) Форма промежуточной аттестации (<i>по семестрам</i>) |
|----------|---|---------|-----------------|---|-----------|--------------------|-----------------|---|
| | | | | Лек ц. | Пра к. | Кон тр. раб. | Са м. Раб | |
| 1. | Введение. Историческая справка. Цели и задачи теории надежности. Основные составляющие. Системная и параметрическая теория надежности. Прогнозирование | 9 | 1 | 2 | - | | 2 | |

| | | | | | | | | |
|----|---|---|---|---|---|--|---|--|
| | ресурса. Вероятностный характер параметров конструкций, внешних воздействий и прочих факторов. Экономические аспекты надежности. | | | | | | | |
| 2. | Терминология. Государственный стандарт. Понятие надежности, безотказности, долговечности. Работоспособное, предельное состояния. Отказ, виды отказов. Нарботка, ресурс, другие временные характеристики. Интенсивность отказов. Вероятность безотказной работы. | 9 | 2 | 2 | 2 | | 2 | |
| 3. | Общая теория надежности. Понятие пространств качества, нагрузки, состояния. Математическая формулировка задачи надежности. Процесс накопления необратимых повреждений, ведущих к отказу. | 9 | 3 | 2 | 2 | | 2 | |

| | | | | | | | | |
|----|---|---|---|---|---|--------------|---|--|
| | Уравнение накопления повреждений. | | | | | | | |
| 4. | Надежность работы объектов до первого отказа. Показатели безотказности, долговечности. Зависимости между показателями безотказности. Статистические оценки показателей по результатам испытаний. Экспоненциальный закон надежности, другие используемые законы. | 9 | 4 | 2 | 2 | Кон тр. Раб. | 2 | Проверка домашнего задания, контрольная работа, промежуточная аттестация |
| 5. | Надежность объектов при внезапных отказах. Модель оценки вероятности безотказной работы при однократном воздействии (модель «нагрузка-прочность»). Прогнозирование вероятности безотказной работы в случае, когда внешнее воздействие задается потоком независимых дискретных | 9 | 5 | 2 | 2 | Кон тр. Раб. | 2 | Проверка домашнего задания, контрольная работа, промежуточная аттестация |

| | | | | | | | | |
|----|---|---|-----|---|---|--------------|---|--|
| | воздействий. Применение теории выбросов случайных процессов для оценки вероятности безотказной работы. | | | | | | | |
| 6. | Надежность объектов при постепенных отказах. Нахождение вероятности безотказной работы объекта в случае линейного закона накопления повреждений. Прогнозирование времени достижения предельного состояния объекта при использовании различных видов уравнения накопления повреждений. | 9 | 6 | 2 | 4 | - | 2 | |
| 7. | .Надежность работы систем до первого отказа. Расчет надежности системы по показателям надежности ее элементов. Последовательное соединение элементов. Модель гибели. Резервирование. Метод Байеса. | 9 | 7,8 | 4 | 4 | Кон тр. Раб. | 4 | Проверка домашнего задания, контрольная работа, промежуточная аттестация |

1. Цели и задачи теории надежности

Занятие 1.

Цели занятия: Дать историческую справку о развитии теории надёжности. Сформулировать цели и задачи теории надежности. Определить основные составляющие. Системная и параметрическая теория надежности. Прогнозирование ресурса. Рассмотреть вероятностный характер параметров конструкций, внешних воздействий и прочих факторов. Показать экономические аспекты надежности.

Беседа преподавателя об истории и сущности теории надежности, об особенностях курса, к изучению которого приступают студенты, и о способах работы с материалом, особенностях подходов к изучению курса в проектно-ориентированных методах обучения.

Ход занятия

ВЫЗОВ

- 1) Какие требования предъявляются к характеристикам приборов и механизмов на современном этапе развития техники?
- 2) Как бы вы охарактеризовали, что такое надежность механизма, любого прибора, объекта?
- 3) Какие стадии включает в себя создание объекта?
- 4) Какими способами обеспечивается надежность на различных стадиях жизненного цикла объекта: проектирования, изготовления, эксплуатации, продления срока службы? Ваши соображения.
- 5) Какие показатели учитываются при работе над надежностью? Всегда ли необходимо создавать изделия с максимальными показателями надежности? Что может являться лимитирующим фактором в повышении надежности?

ОСМЫСЛЕНИЕ

Работа организуется в группах из трех человек.

1 человек в группе получает текст о целях и задачах теории надежности.

2 человек работает с текстом об основных составляющих теории надёжности.

3 человек в группе получает текст об экономических показателях.

Задание

При чтении необходимо выделить ключевые положения в каждом из текстов.

Чтение текста. Работа индивидуальная.

Текст 1

Развитие современной техники характеризуется увеличением степени автоматизации машин и конструкций, повышением их эксплуатационных характеристик, возрастанием требований к эффективности и надежности их функционирования.

Основой для создания инженерных объектов высокой надежности служит совокупность мер, связанных со всеми стадиями жизненного цикла объекта: проектирования, изготовления, эксплуатации, продления срока службы.

На стадии проектирования закладывается надежность объекта путем выбора адекватных расчетных схем конструктивных узлов, анализа условий эксплуатации и выявления основных факторов, влияющих на работоспособность объекта и темпы его деградации, выбора конструкционных материалов, контролируемых узлов и опасных зон и т.д.

На стадии изготовления обеспечивается надежность объекта путем контролирования технологического цикла его изготовления, контроля отклонений от проектных решений, определения начальной дефектности, испытания отдельных узлов, моделей и головных образцов с целью подтверждения проектных решений.

На стадии эксплуатации реализуется надежность объекта путём контроля процессов деформирования, изнашивания, накопления повреждений и разрушения материала в опасных зонах конструктивных узлов, гарантирующего не наступление их предельных состояний.

На стадии продления срока службы надежность обеспечивается контролем фактического состояния материала опасных зон конструктивных узлов, определением выработанного ресурса по фактической истории

эксплуатации конструкционного узла, оценкой остаточного ресурса до наступления предельного состояния и назначением следующего срока контроля.

Естественно, что обеспечение надежности объекта на каждом из этапов его жизни связано с определенными экономическими затратами т.к. экономика в большинстве случаев является критерием для принятия решения. В связи с этим уместно привести высказывание всемирно известного авиаконструктора, академика АН СССР А.Н. Туполева: «...чем дальше от доски конструктора обнаруживается ненадежность, тем дороже она обходится».

Проблема надежности объектов носит комплексный характер и связана с решением не только производственных и эксплуатационных задач, но и разработкой новых методологических и управленческих проблем.

Теория надежности предназначена для выбора оптимальных технических решений, связанных с необходимостью сохранения основных технических характеристик объекта и его элементов в течение требуемого промежутка времени при определенных условиях эксплуатации.

Наука о надежности как прикладная отрасль знаний базируется на результатах естественных и математических наук, изучает закономерности изменений показателей качества технических объектов и систем и на основании этого разрабатывает методы, обеспечивающие с наименьшей затратой времени и средств необходимую продолжительность работы.

Теория надежности является комплексной дисциплиной и состоит из таких разделов как математическая теория надежности, расчет и прогнозирование надежности, мероприятия по повышению надежности, контроль надежности (испытание, статистический контроль, организация наблюдений) и техническая диагностика, экономические вопросы надежности.

Специфическими чертами проблемы надежности являются:

- необходимость учета фактора времени т.к. оценивается изменение характеристик объекта в процессе его эксплуатации;
- прогнозирование изменения состояния объекта с точки зрения обеспечения его ресурса и вероятности безотказной работы.

Наиболее широкое развитие получили три основных направления теории надежности: системная теория надежности, параметрическая теория надежности и теория надежности машин и конструкций.

Возникновение теории надежности как науки в 50-х годах двадцатого столетия связано с исследованием систем, элементы которых взаимодействуют между собой по некоторым логическим схемам сохранения работоспособности. Элементы указанных систем являются изделиями массового производства, для которых возможно получение достоверных статистических оценок показателей надежности. Основной задачей является задача оценки показателей надежности системы по известным показателям отдельных элементов, разработкой структур сложных схем, обеспечивающих высокий уровень надежности. Характерным для таких систем является однородность условий эксплуатации. Данное направление развития теории надежности носит название системной теории надежности.

Параметрическая теория надежности трактует отказ объекта как выход параметров, характеризующих работоспособность объекта за некоторые установленные пределы.

Теория надежности машин и конструкций предполагает учет силового и кинематического взаимодействия элементов машин и конструкций, учет процессов деформирования, изнашивания, накопления повреждений и разрушения при переменных нагрузках, температурах и прочих внешних воздействиях. Значительную роль здесь играют вопросы изучения физико-механических процессов, происходящих в объекте в процессе эксплуатации, разработки методов расчета на прочность, износ и т.п.

Постоянно идут процессы как развития каждого из направлений теории надежности, так и взаимопроникновения идей и методов.

Отметим роль и место математики в теории надежности. В теории надежности математика находит чрезвычайно широкое применение. Средства математики дают возможность формализовать объект исследований и все те компоненты задачи, которые в совокупности образуют ее постановку. Удачно построенная модель изучаемого объекта обеспечивает использование средств, накопленными другими исследователями.

Вместе с тем было бы неверным считать, что все проблемы инженерной деятельности можно решить, за счёт достижения высокого уровня владения математическими методами.

Во-первых, любые теории надежности являются содержательными теориями, где на первом месте стоят реальные задачи инженерной практики, а не методы, используемые для их решения; во-вторых, формализация любой новой инженерной задачи сама по себе не является формализованной процедурой, это процесс творческий, где собственно математика не играет главенствующей роли; в-третьих, полученный при решении задачи результат, вполне корректный с точки зрения использованной математической модели, не приобретает абсолютного значения в рамках содержательной постановки задачи. Результат есть некоторая промежуточная инстанция, адресованная исследователю для последующей ее интерпретации и принятия решения.

Математика в теории надежности занимает особое, хотя и подчиненное, место и играет, безусловно, важную, но далеко не решающую роль.

Текст 2

Классификация и основные составляющие теории надёжности

Основные понятия, показатели и характеристики надёжности имеют универсальный характер и могут быть применены к объектам различной природы, в том числе, к системам «человек-машина», оценке прочности и ресурса конструкций, их элементов и т.п.

Исторически развитие теории надёжности происходило по двум основным направлениям.

Для первого направления характерно преимущественное развитие математических методов оценки надёжности применительно к сложным системам, статистической обработки информации о надёжности ее элементов, с разработкой структурных схем изучаемых систем, обеспечивающих высокий уровень надёжности. Областью применимости данного направления является, как правило, надёжность изделий радиоэлектронной промышленности.

Второе направление, получившее распространение в машиностроение, связано с углублённым изучением физико-механических процессов накопления необратимых повреждений ведущих к отказу объекта,

применением технологических и конструкционных приемов, обеспечивающих необходимую надёжность.

Теория надёжности как прикладная наука базируется на фундаментальных результатах естественных и математических наук, которые способствуют наиболее эффективному решению поставленных задач. Можно выделить основные составляющие теории надёжности: во-первых, математический аппарат, во-вторых, результаты исследований естественных наук, изучающих физико-химические процессы разрушения, старения и изменения свойств материалов, из которых изготовлены объекты, в-третьих, методы расчета систем и конструкций на прочность, долговечность, износ и т.д. с учетом информации о внешних воздействиях, условиях эксплуатации, физико-механических и других процессах протекающих в объектах и ведущих к их отказу. При этом существенным является учет вероятностной природы этих характеристик и величин.

Математический аппарат – это инструмент, эффективность использования которого зависит от степени соответствия его возможностей рассматриваемой задаче. Математические методы надёжности в области радиоэлектроники и смежных областей развивались с учетом таких характерных черт объектов как возможность простой замены отказавшего элемента, наличие многочисленных однотипных элементов, возможности резервирования, однородности условий эксплуатации и т.д.

Математический аппарат, применяемый в машиностроении, должен учитывать специфику возникновения и устранения отказов, описывать процессы, приводящие к изменению начальных показателей качества машин и конструкций. Эти процессы имеют ярко выраженную стохастическую природу и для их задания необходимо привлечение методов теории вероятностей, теории случайных процессов, математической статистики и других разделов математики. Необходим учет взаимодействия элементов в процессе эксплуатации.

Второй основной составляющей теории надёжности являются результаты естественных наук, изучающих виды механических разрушений (сопротивление материалов, теория ползучести и пластичности, механика разрушения и т.д.), изменения, происходящие в материалах и их поверхностных слоях (физико-химическая механика, триботехника), химические процессы разрушения в материалах (коррозия металлов, старение полимеров) и др.

Данную составляющую, в надёжности, иногда определяют как физику отказов. Физика отказов изучает необратимые процессы, приводящие к потере материалом начальных свойств в процессе эксплуатации объектов. Характерной чертой этих исследований является обязательный учет временного фактора.

Важное значение имеют также достижения в области расчета, проектирования и доводки конструкций, а также технологии их изготовления. Здесь рассматриваются зависимости, характеризующие связь показателей надёжности и качества с факторами, которые имеют место в процессе производства и эксплуатации объекта. Для теории надёжности характерно сочетание вероятностных методов оценки процессов изменения параметров качества с выявлением детерминированных закономерностей процессов накопления необратимых повреждений различной природы, а также условий производства и эксплуатации объектов.

С проблемой определения вероятности безотказной работы объекта тесно связана проблема прогнозирования ресурса, как на стадии проектирования, так и на стадии эксплуатации. Целью прогнозирования является предсказание ресурса объекта, установление зависимости его от исходных данных, условий эксплуатации. В силу того, что исходная информация, как правило, носит вероятностный характер, величина прогнозируемого ресурса также является случайной величиной, описываемой некоторой функцией распределения.

Текст 3

Экономические показатели

Помимо указанных показателей надёжности существует ряд других. Весьма важными показателями являются экономические показатели надёжности т.к. повышение безотказности и долговечности объектов, с одной стороны, связано с дополнительными материальными затратами, а с другой – с повышением эффективности капитальных вложений, уменьшения затрат труда на ремонт и обслуживание техники, с устранением потерь от простоя машин в ремонте.

Экономическим показателем надёжности может служить, например, сумма затрат, связанных с изготовлением и эксплуатацией объекта, отнесенная к длительности его эксплуатации

$$K_э = \frac{Q_u + Q_э}{T_э},$$

где $K_э$ – экономический показатель надёжности (руб./час), Q_u – стоимость изготовления нового объекта (руб.), $Q_э$ – суммарные затраты на эксплуатацию, ремонт и обслуживание объекта (руб.), $T_э$ – период эксплуатации объекта (час).

При определении оптимального, с точки зрения экономических требований, уровня надёжности объекта необходимо учитывать то обстоятельство, что требования безотказности двояким образом связаны с затратами на изготовление и эксплуатацию объекта. При более высоких требованиях к безотказности работы изделия необходимы и повышенные затраты на его изготовление Q_u . Но зато при эксплуатации значение затрат $Q_э$ снижается. Поэтому если определить суммарные затраты на изготовление и эксплуатацию объекта как функцию от вероятности безотказной работы на заданном временном интервале, то минимум этой функции определит экономически оптимальный уровень безотказности изделия.

Выбор уровня надёжности, изменение его значения должен решаться с учетом экономической эффективности т.к. в большинстве случаев экономика является основным критерием для принятия решения.

Поиск различных вариантов рационального решения с учетом достижения требуемого уровня надёжности может исходить из условия получения наибольшего экономического эффекта с учетом затрат на всех стадиях жизни объекта. В общем случае экономический эффект состоит из двух основных факторов (рис. 1).

Во-первых, затраты на создание объекта Q_u , включая затраты на проектирование, испытания и т.п., а также эксплуатацию объекта $Q_э(t)$, причем $Q_э(0) = Q_u$. Эти затраты являются отрицательными в общем балансе экономической эффективности. Во-вторых, прибыль, получаемая за счет Во-первых, затраты на создание объекта Q_u , включая затраты на проектирование, испытания и т.п., а также эксплуатацию объекта $Q_э(t)$, причем $Q_э(0) = Q_u$. Эти затраты являются отрицательными в общем балансе

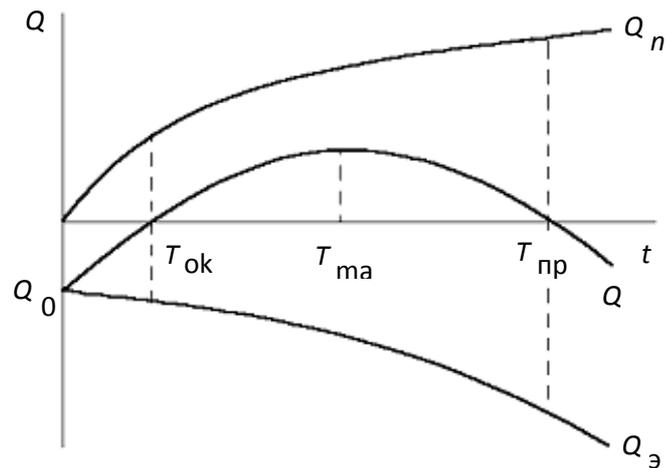


Рис.1 Экономический эффект при эксплуатации объекта

Во-первых, затраты на создание объекта Q_u , включая затраты на проектирование, испытания и т.п., а также эксплуатацию объекта $Q_э(t)$, причем $Q_э(0) = Q_u$. Эти затраты являются отрицательными в общем балансе экономической эффективности. Во-вторых, прибыль, получаемая за счет функционирования объекта $Q_n(t)$. Суммарная эффективность $Q(t) = Q_э(t) + Q_n(t)$ имеет максимум и две точки достижения нулевого уровня.

Момент T_{OK} соответствует окончанию срока окупаемости т.е. когда объект при своей эксплуатации возместил затраты на создание. Начиная с этого момента, эксплуатация объекта приносит прибыль. Однако в дальнейшем происходит снижение ее величины за счет увеличения затрат на обслуживание, ремонт и т.д. В момент $T_{пр}$ затраты на эксплуатацию сравниваются по величине с доходами и дальнейшая эксплуатация объекта становится экономически нецелесообразной. Длительность экономически целесообразной эксплуатации находится в интервале $[T_{маx}, T_{пр})$.

РЕФЛЕКСИЯ

Задание 1.

В группе вы все прочитали разные тексты. Необходимо по ключевым словам составить краткое сообщение о своей части текста, а также подготовить и зафиксировать два вопроса на проверку понимания вашего сообщения (вопросы должны начинаться со слов почему, зачем).

Задание 2. Каждый в группе делает сообщение о прочитанной части текста и задает подготовленные вопросы.

Задание 3. Обсудите в группе прочитанный материал и оформите в виде презентации на листах А3.

Задание 4. Выступить с презентацией от группы. Слушатели других групп задают уточняющие вопросы (вопросы, начинающиеся со слов: правильно ли мы поняли?). Ответы на вопросы, общее обсуждение.

2. Терминология

Занятие 2. Основные термины и определения

Цели занятия: Рассмотреть понятие государственного стандарта, его цель, структуру. Дать определения, относящиеся к работоспособному, предельному состояниям. Обратить особое внимание на термин отказ, виды отказов. Привести примеры, иллюстрирующие термины применительно как к механике конструкций, так и к другим областям техники, медицины и т.п.

Беседа преподавателя. Каждая наука имеет свою терминологию. В теории надежности термины определены Национальным стандартом Российской Федерации. Преподаватель объясняет назначение государственного стандарта, его структуру и содержание.

Необходимые пояснения. Данное занятие разработано в двух вариантах. Преподаватель вправе выбрать вариант ведения занятия в зависимости от подготовленности группы: мотивации студентов, их коммуникативных способностей и уровня подготовки к восприятию материала курса.

Ход занятия

1 вариант

ВЫЗОВ

1. Вопросы преподавателя

1. Что такое изделие? Из чего состоит? Приведите пример.
2. Что общего с точки зрения надёжности у разных изделий?
3. Как вы понимаете смысл термина «отказ»?
4. Приведите примеры отказа изделия.

2. Индивидуальное задание.

Запишите каждый у себя в тетради:

Изделие – это ...

Надёжность –это...

Отказ- это ...

Студенты выборочно зачитывают свои определения.

3. Организация групп. В группе 4 – 5 человек.

4. Задание в группы.

Вам в группы предлагается 6 утверждений. Обсудите в группах и у каждого утверждения поставьте значок: «+» – согласен, «-» – не согласен, «?» – сомневаюсь.

1. В понятие «Изделие» кроме технической составляющей включается человеческий фактор.
2. Изделие безгранично делимо на составные части.
3. Составная часть изделия для рассматриваемого изделия определяется в зависимости от уровня рассмотрения решаемых целей и задач.
4. Отказ изделия имеет качественную формулировку.
5. Невозможно обеспечить надежность изделия в любых условиях функционирования.
6. Отказ изделия не зависит от времени.

5. Фиксация результатов группового обсуждения в таблице на доске.

| Группа/Утверждение | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---------------------------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|
| 1 | + | ? | ? | ? | + | + |
| 2 | - | + | + | - | + | - |
| 3 | ? | - | - | - | + | ? |
| 4 | | | | | | |
| 5 | | | | | | |
| 6 | | | | | | |

ОСМЫСЛЕНИЕ

Чтение текста. Работа индивидуальная.

1. Общие понятия

Национальный стандарт Российской Федерации ГОСТ Р 27.002-2009.
Надежность в технике. Термины и определения.

Все понятия, определения, терминология в теории надёжности относятся к

изделию (item, entity): любая функциональная единица, которую можно рассматривать в отдельности.

Примечания

1 Примерами изделий могут быть система, подсистема, оборудование, устройство, аппаратура, узел, деталь, элемент.

2 Изделие может состоять из технических средств, программного обеспечения или их сочетания и может также в частных случаях включать людей.

3 Группу изделий можно рассматривать как самостоятельное изделие.

Составная часть (sub-item): рассматриваемая часть изделия

Примечание - Составную часть можно рассматривать как самостоятельное изделие.

Уровень разукрупнения (для технического обслуживания): уровень разделения изделия на составные части с точки зрения операций технического обслуживания.

Примечания

1 Примерами уровней разукрупнения могут быть составные части, блоки, печатные платы, элементы.

2 Уровень разукрупнения зависит от сложности структуры изделия, доступности к составным частям, необходимых навыков персонала, соображений безопасности.

Требуемая функция: функция или сочетание функций, которые рассматривают как необходимые для оказания услуги.

Примечание - Требуемая функция может быть установлена, предполагаться или быть обязательной.

Верификация: Подтверждение посредством предоставления объективных свидетельств того, что требования, предназначенные для конкретного использования или применения, выполнены.

Примечания

1 Термин «верификация» используют для обозначения соответствующего статуса.

2 Деятельность по подтверждению требования может включать в себя: - осуществление альтернативных расчетов;

- сравнение спецификации на новый проект с аналогичной документацией на апробированный проект;

- проведение испытаний и демонстраций;

- анализ документов до их выпуска [[ГОСТ Р ИСО 9000-2008](#), статья 3.8.4]

При наличии или отсутствии возможности восстановления работоспособного состояния в рассматриваемой ситуации и (или) предусмотрено или не предусмотрено такое восстановление в нормативно-технической и (или) конструкторской документации изделия подразделяются на *восстанавливаемые* и *невосстанавливаемые*.

Одно и то же изделие может быть как восстанавливаемым так и не восстанавливаемым в зависимости от его целевого назначения и условий использования.

Восстанавливаемое изделие: изделие, которое при данных условиях после отказа может быть возвращено в состояние, в котором оно может выполнять требуемую функцию.

Примечания

1 «Данные условия» могут включать климатические, технические или экономические обстоятельства.

2 Изделие, которое является восстанавливаемым при одних данных условиях, может быть невосстанавливаемым при других условиях.

Невосстанавливаемое изделие: изделие, которое при данных условиях после отказа не может быть возвращено в состояние, в котором оно способно выполнить требуемую функцию.

Примечания

1 «Данные условия» могут включать климатические, технические или экономические обстоятельства.

2 Изделие, которое является невосстанавливаемым при одних данных условиях, может быть восстанавливаемым при других условиях.

Надежность: свойство готовности и влияющие на него свойства безотказности и ремонтпригодности, и поддержка технического обслуживания.

Примечание - Данный термин используют только для общего не количественного описания надежности.

Готовность: способность изделия выполнить требуемую функцию при данных условиях в предположении, что необходимые внешние ресурсы обеспечены.

Примечания

1 Эта способность зависит от сочетания свойств безотказности, ремонтпригодности и поддержки технического обслуживания.

2 «Данные условия» могут включать климатические, технические или экономические обстоятельства.

3 Необходимые внешние ресурсы, кроме ресурсов технического обслуживания, не влияют на свойство готовности.

Безотказность: способность изделия выполнить требуемую функцию в заданном интервале времени при данных условиях.

Примечания

1 «Данные условия» могут включать климатические, технические или экономические обстоятельства.

2 Обычно предполагают, что в начале интервала времени изделие в состоянии выполнить требуемую функцию.

Долговечность: способность изделия выполнять требуемую функцию до достижения предельного состояния при данных условиях использования и технического обслуживания.

Примечание - «Данные условия» могут включать климатические, технические или экономические обстоятельства.

Ремонтпригодность: способность изделия при данных условиях использования и технического обслуживания к поддержанию или восстановлению состояния, в котором оно может выполнить требуемую функцию.

Примечание - «Данные условия» могут включать климатические, технические или экономические обстоятельства.

Отметим некоторые особенности определения надёжности:

— надёжность есть сложное свойство, сочетающее в себе в зависимости от назначения изделия и условий его эксплуатации в различных

соотношениях такие свойства как безотказность, долговечность, ремонтпригодность и сохраняемость, в частности, для неремонтируемых изделий определяющим свойством может являться свойство безотказности;

– в определение безотказности существенным является непрерывность выполнения изделием заданных функций;

– вводится понятие установленных пределов значений всех параметров, т.е. допускается возможность того, что параметры изделия в процессе эксплуатации могут изменять свои значения.

Понятие безотказности раскрывает и подчеркивает непрерывную работу изделия без каких-либо вмешательств извне для поддержания его работоспособности. Свойство безотказности особенно важно для машин, отказ в работе которых связан с опасностью для жизни людей или с остановкой сложного и дорогостоящего производства.

Долговечность, наоборот, рассматривает работу изделия за весь период его эксплуатации и учитывает, что его продолжительная работа невозможна без ремонтных и профилактических мероприятий, восстанавливающих работоспособность, утраченную в процессе эксплуатации.

При оценке надёжности изделия различают следующие состояния.

Работоспособное состояние: состояние изделия, при котором оно способно выполнить требуемую функцию при условии, что предоставлены необходимые внешние ресурсы.

Примечание - Изделие в одно и то же время может находиться в работоспособном состоянии для некоторых функций и в неработоспособном состоянии для других функций.

Предельное состояние: состояние изделия, при котором его дальнейшая эксплуатация недопустима или нецелесообразна по причинам опасности, экономическим или экологическим.

Критерий предельного состояния: признаки предельного состояния, по которым принимают решение о его наступлении.

Критическое состояние: состояние изделия, которое может привести к тяжелым последствиям: травмированию людей, значительному материальному ущербу или неприемлемым экологическим последствиям.

Если исключить из рассмотрения выходы из строя изделий вследствие реализации непредусмотренных режимов эксплуатации, не поддающихся

контролю природных воздействий, грубых ошибок при проектировании или эксплуатации, то остальные случаи наступления предельных состояний можно отнести к одной из трех основных групп.

Первую группу образуют предельные состояния, наступившие в результате постепенного накопления повреждений (старения), приводящих к зарождению и развитию макроскопических трещин. Причиной выхода изделия из строя являются процессы развития наиболее опасных трещин до критических размеров и возникновение аварийных ситуаций. Предельное состояние первой группы типично для несущих элементов, работающих при высоких уровнях нестационарных термомеханических нагрузок (сосуды и трубопроводы высокого давления), вибрационных нагрузок и т.д.

Вторую группу образуют предельные состояния, связанные с чрезмерным износом трущихся деталей и поверхностей, находящихся в контакте рабочей или окружающей средой (коррозия).

Третья группа состоит из предельных состояний, связанных с большим формоизменением начальных геометрических размеров деталей оборудования вследствие процессов ползучести материала в условиях нестационарных высоких температур.

Отказ: потеря способности изделия выполнить требуемую функцию.

Примечание - Отказ является событием, которое приводит к состоянию неисправности.

Критерий отказа: заранее оговоренные признаки нарушения работоспособного состояния, по которым принимают решение о факте наступления отказа.

Полный отказ: отказ, характеризующийся потерей способности изделия выполнять все требуемые функции.

Частичный отказ: отказ, характеризующийся потерей способности изделия выполнять некоторые, не все требуемые функции.

Примечание - Частичный отказ является событием, которое приводит к состоянию частичной неисправности.

Независимый отказ: отказ, не вызванный прямо или косвенно другим отказом или неисправностью.

Зависимый отказ: отказ, вызванный другим отказом или неисправностью.

Последствия отказа: важность, значимость отказа в пределах или вне пределов изделия.

Причина отказа: обстоятельства в ходе разработки, производства или использования, которые привели к отказу.

Механизм отказа: физический или химический процесс, который приводит к отказу.

Ошибка человека: действие человека, приведшее к непреднамеренному результату.

Отказ вследствие изнашивания: Отказ, вероятность возникновения которого возрастает с течением времени из-за накапливаемых ухудшений, вызванных прилагаемыми при использовании нагрузками.

Отказ вследствие старения: отказ, вероятность возникновения которого увеличивается из-за накапливающихся ухудшений течением календарного времени.

Отказы по общей причине: отказы различных изделий или их составных частей, происходящие из-за одного события, если эти отказы не являются следствиями друг друга.

Отказы общего вида: отказы различных изделий или их составных частей, характеризующиеся одним и тем же видом отказа.

Примечания

1 Отказы общего вида могут иметь различные причины.

2 Отказы общего вида могут также быть отказами по общей причине.

Критичность отказа: оценка возможной степени тяжести последствий отказа.

Критический отказ: отказ, который может привести к тяжелым последствиям: травмированию людей, значительному материальному ущербу или неприемлемым экологическим последствиям.

Повреждение: приемлемая для пользователя неполная способность изделия

выполнить требуемую функцию.

РЕФЛЕКСИЯ

1. Возврат к таблице, обсуждение в группе, исправление результатов – при необходимости с презентацией у доски. В любом случае – общее обсуждение полученных результатов.
2. Вопросы для фронтального обсуждения.
 1. Объясните разницу между терминами безотказность и долговечность.
 2. Определите соотношение понятий работоспособное и предельное состояния, приведите примеры для конкретных изделий.
 3. Дайте Ваше расширенное понимание термина ***Ошибка человека***

3. Задание

Исправьте или дополните ваши первоначальные определения по схеме

Изделие – это не только, но и ...

Надёжность – это ...

Отказ - это ...

Студенты выборочно зачитывают свои определения.

Ход занятия

2 вариант

ВЫЗОВ

включает в себя либо все, либо выборочные вопросы и задания 1 варианта проведения занятия.

ОСМЫСЛЕНИЕ

Чтение текста. Работа индивидуальная.

РЕФЛЕКСИЯ

Задание 1

В группах необходимо заполнить таблицу 1.

Табл. 1.

| № | Понятие | Определение |
|----|------------------------------|-------------|
| 2 | изделие | |
| 4 | система | |
| 5 | неремонтируемые объекты | |
| 6 | восстанавливаемые объекты | |
| 7 | эксплуатация | |
| 8 | надежность | |
| 9 | безотказность | |
| 10 | долговечность | |
| 11 | ремонтпригодность | |
| 12 | сохраняемость | |
| 13 | безопасность | |
| 16 | работоспособное состояние | |

| | | |
|----|-----------------------------------|--|
| 17 | предельное состояние | |
| 18 | критерии предельного состояния | |
| 19 | отказ | |
| 20 | повреждение | |
| 21 | критерии отказа | |
| 22 | внезапный отказ | |
| 23 | постепенный отказ | |
| 24 | явный отказ | |
| 25 | скрытый отказ | |
| 26 | ресурсные (деградационные) отказы | |
| 27 | прирабочные отказы | |
| 28 | наработка объекта | |
| 29 | наработка до отказа | |
| 30 | наработка между отказами | |
| 31 | ресурс | |
| 32 | выработанный ресурс | |
| 33 | остаточный ресурс | |
| 34 | назначенный ресурс | |
| 35 | назначенный срок службы | |

Общее обсуждение: все ли удалось заполнить? Есть ли вопросы? Выборочно проверить.

Задание 2

Все понятия, с которыми вы работали, можно разделить по категориям:

- классификация объектов;
- свойства надежности при эксплуатации;
- состояния объекта при оценке надежности;
- предельные состояния.

Ваша задача: вписать понятия в соответствующие столбцы таблицы 2.

Табл. 2

| Классификация объектов | Свойства надежности при эксплуатации | Состояния объекта при оценке надежности | Условия прекращения работоспособного состояния |
|------------------------|--------------------------------------|---|--|
| | | | |

Задание 3

Вам в группах необходимо дать описание содержания следующих понятий:

- эксплуатация
- безопасность
- исправное состояние
- предельное состояние
- отказ
- ресурс
- назначенный ресурс

для следующих технических объектов: пылесос, электрическая лампочка, мост, стул.

Общее обсуждение

Задание 4.

Возврат к обсуждаемым вопросам и заданиям из выбранных позиций ВЫЗОВА первого варианта проведения занятия

Приложение – материалы для преподавателя

| № | Понятие | Определение |
|---|---------|--|
| 2 | изделие | единица промышленной продукции, которое может исчисляться в штуках или экземплярах |
| 4 | система | упорядоченная совокупность взаимосвязанных и взаимодействующих |

| | | |
|---|---------------------------|--|
| | | элементов, образующих единое функциональное целое, предназначенное для выполнения заданных функций. |
| 5 | неремонтируемые объекты | эксплуатируются до первого отказа |
| 6 | восстанавливаемые объекты | наличие возможности восстановления работоспособного состояния |
| 7 | эксплуатация | стадия жизненного цикла изделия с момента принятия его эксплуатирующей организацией от завода-изготовителя или ремонтного предприятия, являющееся совокупностью этапов ввода в эксплуатацию, приведения в установленную степень готовности к использованию по назначению, поддержания в установленной степени готовности к этому использованию, использования по назначению, хранения и транспортирования. |
| 8 | надежность | свойство объекта сохранять во времени в установленных пределах значения всех параметров, характеризующих способность выполнять требуемые функции в заданных режимах и условиях применения, технического обслуживания, ремонтов, хранения и транспортирования; комплексное свойство, состоящее из сочетания свойств безотказности, долговечности, ремонтпригодности и сохраняемости |
| 9 | безотказность | свойство объекта непрерывно сохранять работоспособное состояние в течение |

| | | |
|----|---------------------------|--|
| | | некоторого времени или наработки |
| 10 | долговечность | способность объекта не достигать предельного состояния в течение некоторого времени или наработки при установленной системе технического обслуживания и ремонта |
| 11 | ремонтпригодность | приспособленность объекта к поддержанию и восстановлению работоспособности путем технического обслуживания или ремонта |
| 12 | сохраняемость | свойство объекта сохранять в заданных пределах значения параметров, характеризующих способность объекта выполнять требуемые функции до и после хранения и (или) транспортировки |
| 13 | безопасность | свойство объекта при изготовлении и эксплуатации и в случае нарушения работоспособности состояния не создавать угрозу для жизни и здоровья людей, а также для окружающей среды |
| 16 | работоспособное состояние | состояние объекта, при котором значение всех параметров, характеризующих способность выполнять заданные функции, соответствует требованиям нормативно-технической и (или) конструкторской документации. Если хотя бы один параметр не удовлетворяет требованию, то имеем дело с неработоспособным состоянием |
| 17 | предельное состояние | состояние объекта, при котором его дальнейшая эксплуатация недопустима или нецелесообразна, либо его восстановление до работоспособного состояния невозможно или нецелесообразно |

| | | |
|----|--------------------------------|---|
| 18 | критерии предельного состояния | совокупность признаков наступления предельного состояния объекта, установленных нормативно-технической и (или) проектно - конструкторской документацией. Объект может перейти в предельное состояние, оставаясь работоспособным, если его дальнейшая эксплуатация недопустима по требованиям безопасности, экономичности или эффективности. |
| 19 | отказ | любое событие, заключающееся в нарушении работоспособного состояния объекта. |
| 20 | повреждение | нарушение исправного состояния объекта при сохранении его работоспособности. |
| 21 | критерии отказа | признак или совокупность признаков нарушения работоспособного состояния объекта, установленных документацией |
| 22 | внезапный отказ | отказ, характеризующийся скачкообразным изменением значений одного или нескольких параметров объекта |
| 23 | постепенный отказ | отказ, наступлению которого предшествует непрерывное и монотонное изменение одного или нескольких параметров, характеризующих способность объекта выполнять заданные функции. Постепенные отказы возникают в результате процессов накопления повреждений (старения объекта) |
| 24 | явный отказ | отказ, обнаруживаемый визуально или штатными методами и средствами контроля и диагностирования при подготовке объекта к применению или в процессе применения по |

| | | |
|----|-----------------------------------|---|
| | | назначению |
| 25 | скрытый отказ | отказ, не обнаруживаемый визуально или штатными методами и средствами контроля и диагностирования, но выявляемый при проведении технического обслуживания или специальными методами диагностики. |
| 26 | ресурсные (деградационные) отказы | отказы, вызванные процессами старения, накопления повреждений, изнашивания, коррозии и т.д. при соблюдении всех установленных правил и норм проектирования, изготовления и эксплуатации. |
| 27 | прирабочные отказы | отказы, возникающие на ранней стадии эксплуатации, когда проявляется влияние дефектов, не обнаруженных на стадии изготовления, испытания, приемочного контроля |
| 28 | наработка объекта | часть суммарного времени эксплуатации объекта, в течение которого объект применяется по назначению. Нарботка может измеряться в различных единицах (часах, циклах, переключениях, километрах). Для каждого механизма деградации объекта можно ввести свою меру наработки, соответствующую его физической природе - так называемое «внутреннее время процесса» |
| 29 | наработка до отказа | наработка объекта от начала эксплуатации до возникновения первого отказа. |
| 30 | наработка между отказами | наработка объекта от окончания восстановления его работоспособного |

| | | |
|----|-------------------------|---|
| | | состояния после отказа до возникновения следующего отказа. |
| 31 | ресурс | суммарная наработка объекта от начала его эксплуатации (или возникновения эксплуатации после ремонта) до перехода объекта в предельное состояние. |
| 32 | выработанный ресурс | суммарная наработка объекта от начала его эксплуатации до текущего момента эксплуатации (текущего момента контроля его технического состояния) |
| 33 | остаточный ресурс | суммарная наработка объекта от текущего момента эксплуатации (текущего момента контроля) до наступления предельного состояния. |
| 34 | назначенный ресурс | суммарная наработка объекта, при достижении которой эксплуатация объекта должна быть прекращена независимо от его технического состояния. |
| 35 | назначенный срок службы | календарная продолжительность эксплуатации, при достижении которой эксплуатация объекта должна быть прекращена независимо от его технического состояния |

Табл.2

| Классификация | Свойства | Состояния | Условия |
|---------------|----------|-----------|---------|
|---------------|----------|-----------|---------|

| объектов | надежности при эксплуатации | объекта при оценке надежности | прекращения работоспособного состояния |
|--|---|---|--|
| <p>изделие</p> <p>элемент</p> <p>система</p> <p>неремонтируемые объекты</p> <p>восстанавливаемые объекты</p> | <p>эксплуатация</p> <p>надежность</p> <p>безотказность</p> <p>долговечность</p> <p>ремонтпригодность</p> <p>сохраняемость</p> <p>безопасность</p> | <p>исправное состояние</p> <p>работоспособное состояние</p> <p>предельное состояние</p> | <p>отказ</p> <p>повреждение</p> <p>критерии отказа</p> <p>внезапный отказ</p> <p>постепенный отказ</p> <p>явный отказ</p> <p>скрытый отказ</p> <p>ресурсные отказы</p> <p>приработочные отказы</p> <p>наработка объекта</p> <p>наработка до отказа</p> <p>наработка между отказами</p> <p>ресурс</p> <p>выработанный ресурс</p> <p>остаточный ресурс</p> <p>назначенный ресурс</p> |

Занятие 3.

Временные характеристики надежности.

Цели занятия: Отметить особую значимость временного фактора при анализе надёжности изделия. Подчеркнуть многообразие и многоплановость характеристик. Рассмотреть вопрос о количественных характеристиках надежности, подчеркнув их вероятностную природу. Обратит внимание на значимость экономического фактора при решении проблемы надёжности изделия.

Часть 1. Временные характеристики надежности

Беседа преподавателя. Преподавателем подчёркивается, что все изделия имеют конечную длительность нахождения в работоспособном состоянии и с течением времени характеристики изделия, определяющие работоспособное состояние, ухудшаются. Таким образом, временной фактор является определяющим при рассмотрении вопросов обеспечения надёжности изделия.

Отказ любого типа эксплуатируемого изделия возникает через некоторый период времени, который является случайной величиной.

ВЫЗОВ 1.

Вопрос преподавателя.

Обязательно ли временной фактор должен оцениваться календарной продолжительностью от начала эксплуатации изделия или её возобновления после ремонта до перехода в предельное состояние? Есть ли какие-либо другие варианты?

ОСМЫСЛЕНИЕ 1.

Организуется работа в парах.

Раздается таблица, в которой приведены понятия, используемые в теории надежности, напрямую или опосредовано связанные с временными факторами.

Задание

Ознакомьтесь с материалом таблицы, обсудите в паре, все ли вы поняли.

| | |
|---|---|
| <i>Срок службы</i> | продолжительность эксплуатации изделия или ее возобновления после капитального ремонта до наступления предельного состояния |
| <i>Наработка</i> | интервал времени, в течение которого изделие находится в состоянии функционирования. |
| <i>Наработка до отказа</i> | наработка, накопленная от первого использования изделия или от его восстановления до отказа. |
| <i>Время между отказами</i> | интервал времени между двумя последовательными отказами восстанавливаемого изделия |
| <i>Наработка между отказами:</i> | суммарная наработка восстанавливаемого изделия между двумя последовательными отказами. |
| <i>Ресурс</i> | суммарная наработка изделия в течение срока службы |
| <i>Средний ресурс</i> | математическое ожидание ресурса |
| <i>Гамма-процентный ресурс</i> | ресурс, в течение которого изделие не |

| | |
|---|--|
| | достигнет предельного состояния с вероятностью u , выраженной в процентах |
| Остаточный срок службы | срок службы, исчисляемый от текущего момента времени |
| Остаточный ресурс | ресурс, исчисляемый от значения наработки в текущий момент времени |
| Время до восстановления | интервал времени от момента отказа изделия до момента его восстановления. |
| Вероятность безотказной работы $R(t_1, t_2)$: | вероятность выполнить требуемую функцию при данных условиях в интервале времени (t_1, t_2) . |
| Мгновенный параметр потока отказов $z(t)$ | <p>предел, если он существует, отношения среднего числа отказов ремонтируемого изделия в интервале времени $(t, t + \Delta t)$ к длине этого интервала Δt, стремящейся к нулю.</p> <p>Примечание - Мгновенный параметр потока отказов выражен формулой</p> $z(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0^+} \frac{E[N(t + \Delta t) - N(t)]}{\Delta t},$ <p>где $N(t)$ - число отказов в интервале времени $(0, t)$;</p> <p>E - математическое ожидание.</p> |
| Средний параметр потока отказов $\bar{z}(t_1, t_2)$ | среднее значение мгновенной интенсивности отказа в интервале времени (t_1, t_2) . |
| Средняя наработка до первого отказа | математическое ожидание наработки до первого отказа |

| | |
|---|---|
| <i>Средняя наработка до отказа</i> | математическое ожидание наработки до отказа |
| <i>Средняя наработка между отказами</i> | математическое ожидание наработки между отказами |
| <i>Гамма-процентная наработка до отказа</i> | наработка, в течение которой отказ не возникнет с вероятностью γ , выраженной в процентах |
| <i>Средний срок службы</i> | математическое ожидание срока службы |
| <i>Гамма-процентный срок службы</i> | срок службы, в течение которого изделие не достигнет предельного состояния с вероятностью γ , выраженной в процентах |

РЕФЛЕКСИЯ 1.

Вопросы преподавателя.

1. Вследствие чего разные изделия при одинаковых условиях эксплуатации оказываются работоспособными в течение разного времени?
2. Чем характеризуются случайные величины (с.в.)?
3. Покажите, что понятия: *Средняя наработка до первого отказа* *Средняя наработка до отказа* *Средняя наработка между отказами* *Гамма-процентная наработка до отказа* – связаны с временными факторами надежности.

Часть 2. Показатели надёжности

Необходимые пояснения. Данная часть занятия разработана в двух вариантах. Преподаватель вправе выбрать вариант ведения занятия в зависимости от подготовленности группы.

Ход занятия

1 вариант

ВЫЗОВ 2.

На прошлых занятиях мы выяснили, что такое надежность и говорили о том, что этот термин используют только для общего качественного описания надежности.

Сегодня мы поговорим о количественных характеристиках – показателях надежности.

Вопрос преподавателя. Показатели, используемые для количественной оценки надёжности изделия или системы, формулируются в вероятностных терминах. С чем это связано?

Выслушиваются все предположения и фиксируются преподавателем на доске.

ОСМЫСЛЕНИЕ 2.

Необходимые пояснения. Организуется работа в группах из 4-х человек. В группы раздается набор из четырех текстов.

Текст 1. Вероятность безотказной работы

Текст 2. Функция плотности распределения до отказа

Текст 3. Интенсивность отказов

Текст 4. Параметр потока отказов

Каждый участник группы получает материал по 1 показателю надежности.

Задание

Прочитать текст. При чтении все математические выкладки и формулы обязательно заносить в тетрадь.

На изучение части текста выделено 10 минут.

РЕФЛЕКСИЯ 2.

Задание 1

В группе каждый участник объясняет изученный материал. На изложение выделяется 3 минуты, 5 минут выделяется на уточняющие вопросы и обсуждение. Задача каждого участника группы – максимально доходчиво, с основными математическими результатами объяснить свою часть материала.

Задание 2

От группы заполнить таблицу со всеми показателями надежности, с формулами и пояснениями.

| Показатель надежности | Формула | | Единицы измерения | Комментарии |
|---|---------------|----------------|-------------------|-------------|
| | Теоретическая | Статистическая | | |
| Вероятность безотказной работы | | | | |
| Функция плотности распределения до отказа | | | | |
| Интенсивность отказов | | | | |
| Параметр потока отказов | | | | |

Задание 3. Выступить представителям группы с презентацией у доски.

Задание 4. Ответьте в группе на контрольные вопросы. Ответы зафиксируйте в тетрадях:

1. В чём состоит отличие между терминами «наработка до отказа» и «ресурс».
2. Выработанный и остаточный ресурс изделия являются случайными или детерминированными величинами?
3. Величины $P(t)$, $f(t)$, $\lambda(t)$ являются размерными или безразмерными величинами?
4. Различие между $f(t)$ и $\lambda(t)$ больше на участке приработки или участке старения?

Ход занятия

Вариант 2

ВЫЗОВ 2.

На прошлых занятиях мы выяснили, что такое надежность и говорили о том, что этот термин используют только для общего качественного описания надежности.

Сегодня мы поговорим о количественных характеристиках – показателях надежности.

Вопрос преподавателя. Показатели, используемые для количественной оценки надёжности изделия или системы, формулируются в вероятностных терминах. С чем это связано?

Выслушиваются все предположения и фиксируются преподавателем на доске.

ОСМЫСЛЕНИЕ 2

Чтение текста. Работа индивидуальная.

Задание 1. При чтении отмечайте прочитанный абзац значком «+» - понятно, ? – требует разъяснения.

Задание 2. Математические формулы обязательно занесите в тетрадь.

Показатели надёжности – количественная характеристика одного или нескольких свойств, составляющих надежность изделия.

Основные процессы и факторы, определяющие надежность изделия, как правило, имеют стохастический характер. Действительно, отказ – случайное

событие, срок службы до отказа (наработка) – случайная величина, а процесс накопления необратимых повреждений той или иной природы – случайный процесс. В силу указанных обстоятельств и показатели, используемые для количественной оценки надёжности изделия или системы, формулируются в вероятностных терминах.

Необходимо также отметить следующее обстоятельство. На стадии проектирования изделия показатели надёжности трактуются как характеристики некоторых вероятностных математических моделей, используемых для описания надёжности изделия, а на стадии эксплуатации роль показателей надёжности выполняют статистические оценки соответствующих показателей, получаемые на основе экспериментальных данных.

Показатели надёжности подразделяются на показатели безотказности, долговечности, ремонтпригодности и сохраняемости. Рассмотрим основные показатели безотказности и долговечности.

Основным показателем безотказности изделия является *вероятность безотказной работы* изделия, т.е. вероятность того, что в пределах заданной наработки отказ не возникнет.

Вероятность безотказной работы $R(t_1, t_2)$: вероятность выполнить требуемую функцию при данных условиях в интервале времени (t_1, t_2) .

Примечания

1 Обычно предполагают, что в начале интервала времени изделие находится в работоспособном состоянии.

2 При $t_1 = 0$ и $t_2 = t$ $R(0, t)$ обозначают как $R(t)$.

Обозначим наработку изделия через t , тогда, наработка изделия до возникновения первого отказа τ , будет являться случайной величиной и вероятность безотказной работы (ВБР) на интервале $[0, t]$ определится следующим образом

$$P(t) = \mathbf{P}\{\tau > t\}, \quad (1)$$

где $\mathbf{P}\{A\}$ – вероятность возникновения события A .

Вероятность безотказной работы изделия в интервале $[t, t + t_0]$ определится следующим образом

$$P(t, t + t_0) = P(0, t + t_0) / P(t) = P(t + t_0) / P(t),$$

где $P(t, t + t_0)$ – вероятность того, что изделие будет оставаться работоспособным в течение заданного промежутка $[t, t + t_0]$ или условная вероятность того, что случайная наработка изделия до отказа будет больше величины $t + t_0$ при условии, что изделие уже проработало безотказно до момента времени t .

Отказ изделия, следовательно, и вероятность безотказной работы связан с нарушением работоспособного состояния, т.е. выхода значения хотя бы одного параметра, характеризующего способность изделия выполнять заданные функции, за допустимые пределы.

В случае, когда работоспособное состояние характеризуется одним параметром $v(t)$, будем иметь

$$P(t) = \mathbf{P}\{v_*(\tau) < v(\tau) < v_{**}(\tau); 0 \leq \tau \leq t\}, \quad (2)$$

где $v_*(\tau), v_{**}(\tau)$ – предельные значения параметра, определенные нормативно-технической и (или) конструкторской (проектной) документацией.

Возможна следующая трактовка данного показателя. Если вероятность безотказной работы изделия в течение интервала времени $[0, t]$ равна γ , то это означает, что из большого количества изделий данного типа, работающих в однородных условиях, в среднем около $[(1 - \gamma) \cdot 100]$ % из них потеряют свою работоспособность раньше чем через t часов работы.

По отношению к уникальному или мало серийному изделию эту характеристику можно трактовать как шансы изделия проработать без отказа заданный период времени.

Вероятность безотказной работы $P(t)$ связана с функцией распределения наработки до отказа $F(T)$ соотношением

$$F(T) = 1 - P(t) \Big|_{t=T}, \quad (3)$$

функция плотности распределения наработки до отказа $f(t)$ определяется:

$$f(T) = \left. \frac{dF(t)}{dt} \right|_{t=T} = - \left. \frac{dP(t)}{dt} \right|_{t=T}. \quad (4)$$

Статистическая оценка вероятности безотказной работы $P(t)$, определяемая по результатам эксплуатации большого числа изделий, имеет следующий вид:

$$\hat{P}(t) = 1 - \frac{n(t)}{N}, \quad (5)$$

а статистическая оценка функции плотности распределения наработки до отказа $f(t)$:

$$\hat{f}(t) = \frac{n(t + \Delta t) - n(t)}{N\Delta t}. \quad (6)$$

Здесь N – число изделий, работоспособных в начальный момент времени, $n(t)$ – число изделий, отказавших на отрезке времени $[0, t]$. Длительность отрезка Δt должна удовлетворять требованию $\Delta t \ll t$, в то же время количество отказавших изделий за данный отрезок времени должно быть достаточно большим.

Необходимо подчеркнуть, что использование показателя $P(t)$ без определения периода времени, в течение которого предполагается эксплуатация изделия, не имеет смысла.

Время работы изделия T до первого отказа является случайной величиной, основные численные характеристики которой определяются через функцию распределения наработки до отказа $F(t)$ или функцию плотности распределения наработки $f(t)$

$$\begin{aligned} \mathbf{E}T &= \int_0^{\infty} f(t)t dt - \text{математическое ожидание наработки до отказа,} \\ \mathbf{D}T &= \int_0^{\infty} (t - \mathbf{E}T)^2 f(t) dt - \text{дисперсия наработки до отказа.} \end{aligned} \quad (7)$$

Статистические оценки данных величин, соответственно, имеют следующий вид

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{E}}T &= \frac{1}{n(T)} \sum_{i=1}^{n(T)} T_i, \\ \hat{\mathbf{D}}T &= \frac{1}{n(T)-1} \sum_{i=1}^{n(T)} (T_i - \hat{\mathbf{E}}T)^2, \end{aligned} \quad (8)$$

где $n(T)$ – число отказавших изделий на интервале $[0, T]$, T_i – наработка до отказа i -го изделия.

Из определения вероятности безотказной работы $P(t)$ следует, что, задаваясь значением вероятности $P(t) = \gamma$ можно определить время работы изделия t_γ , соответствующее данной регламентированной величине вероятности безотказной работы. Полученное значение t_γ называется *гамма – процентной наработкой до отказа*, т.е. это наработка, в течение которой отказ изделия не возникнет с вероятностью γ , выраженной в процентах.

Несмотря на то, что значение вероятности безотказной работы $P(t)$ за определенный период времени является основным показателем безотказности, возможны случаи, когда оно перестает быть наглядным и возникает необходимость введения дополнительных показателей.

В расчетах на надежность широко используется *интенсивность отказов*, определяемая как условная плотность вероятности возникновения отказа изделия, при условии, что до рассматриваемого момента времени отказ не возник.

Мгновенная интенсивность отказов $I(t)$: Предел, если он существует, отношения условной вероятности, что момент отказа неремонтируемого изделия произойдет в интервале времени $(t, t + Dt)$ к длине этого интервала Dt , стремящейся к нулю, при условии, что в начале этого интервала изделие находилось в работоспособном состоянии.

Примечание - Мгновенную интенсивность отказов вычисляют по формуле

$$\lambda(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \frac{F(t + \Delta t) - F(t)}{R(t)} = \frac{f(t)}{R(t)},$$

где $F(t)$ и $f(t)$ являются функцией распределения и плотностью распределения

вероятности отказа.

Средняя интенсивность отказов $\bar{\lambda}(t_1, t_2)$: среднее значение мгновенной интенсивности отказов в интервале времени (t_1, t_2) .

Примечание - Среднюю интенсивность отказов вычисляют по формуле

$$\bar{\lambda}(t_1, t_2) = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} \lambda(t) dt.$$

Типичная зависимость величины интенсивности отказов от времени приведена на рис. 1

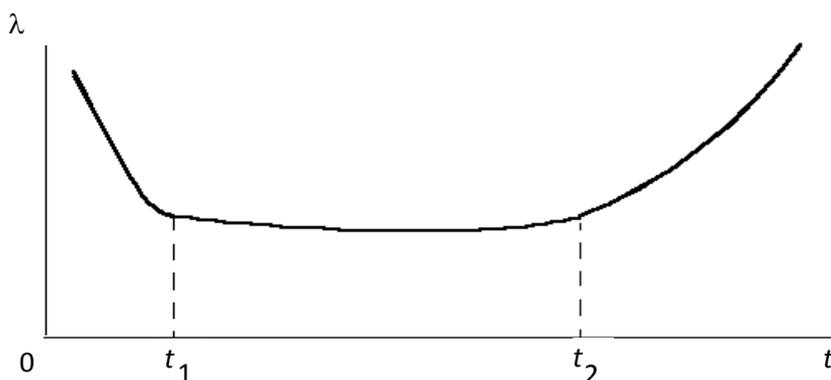


Рис. 1 Кривая интенсивности отказов

Период приработки: начальный период в жизни изделия, если он существует, в течение которого параметр потока отказов восстанавливаемого изделия или интенсивность отказов невосстанавливаемого изделия уменьшаются со временем до относительно постоянного значения.

Период постоянной интенсивности отказов: период в жизни невосстанавливаемого изделия, если он существует, во время которого его интенсивность отказов является *приблизительно* постоянной.

Период износных отказов: период в жизни изделия, если он существует, в течение которого параметр потока отказов восстанавливаемого изделия или интенсивность отказов невосстанавливаемого изделия увеличиваются со временем.

В начальный период работы изделия $[0, t_1)$ – период приработки интенсивность отказов велика вследствие наличия технологических дефектов, которые не были обнаружены при изготовлении и испытании изделия. Во втором периоде $[t_1, t_2)$ интенсивность отказов приблизительно постоянна или медленно возрастает. Этот этап отражает случайные отказы, вызванные неблагоприятным сочетанием внешних и внутренних определяющих факторов. Этап является наиболее длительным и соответствует периоду нормальной эксплуатации. В третьем периоде интенсивность отказов начинает быстро возрастать, что объясняется развивающимися процессами накопления необратимых повреждений той или иной природы, отрицательно влияющими на характеристики изделия, определяющие его работоспособность.

Интенсивность отказов и $\lambda(t)$ не является самостоятельной характеристикой и определяется через функции $P(t)$ $f(t)$ следующим образом:

$$\lambda(t) = \frac{f(t)}{P(t)} = -\frac{\dot{P}(t)}{P(t)}. \quad (9)$$

Для получения данной зависимости рассмотрим следующую задачу: изделие проработало без отказа до момента t , требуется определить вероятность того, что он не откажет на участке $[t, t + \Delta t)$. Обозначим эту вероятность через $P(t, t + \Delta t)$. Применяя формулу полной вероятности $\mathbf{P}\{A|B\} = \mathbf{P}\{AB\} / \mathbf{P}\{A\}$ можем записать применительно к нашей задаче

$$P(t, t + \Delta t) = P(t + \Delta t) / P(t).$$

Отсюда следует, что вероятность отказа изделия на участке $(t, t + \Delta t]$ определится

$$Q(t, t + \Delta t) = 1 - P(t, t + \Delta t) = \frac{P(t) - P(t + \Delta t)}{P(t)} \quad \text{или}$$

$$\frac{Q(t, t + \Delta t)}{\Delta t} = -\frac{P(t + \Delta t) - P(t)}{\Delta t \cdot P(t)}.$$

Из последнего соотношения при $\Delta t \rightarrow 0$ будем иметь $\lambda(t) = \frac{f(t)}{P(t)} = -\frac{\dot{P}(t)}{P(t)}$,

где $\lambda(t)$ не что иное как условная плотность вероятности возникновения отказа изделия при условии, что до рассматриваемого момента времени отказ изделия не возник.

Можно предположить, что $Q(t, t + \Delta t) = \lambda(t)\Delta t + o(\Delta t)$. В этом случае данное соотношение отражает хорошо согласующееся с практикой предположение о том, что вероятность появления двух и более отказов за малый интервал времени Δt для высоконадёжных изделий убывает быстрее, чем длина данного интервала, т.е. $o(\Delta t)$ является величиной более высокого порядка малости чем Δt . При наличии группы одинаковых изделий это означает, что вероятность отказа в один и тот же момент времени двух и более изделий пренебрежимо мала. Данное предположение исключает из рассмотрения такое явление как катастрофа.

Статистическая оценка для интенсивности отказов имеет вид

$$\hat{\kappa}(t) = \frac{n(t + \Delta t/2) - n(t - \Delta t/2)}{[N - n(t)]\Delta t}, \quad (10)$$

здесь отрезок Δt должен удовлетворять тем же условиям, что и при определении оценки функции $f(t)$.

Использование характеристики $\lambda(t)$ при расчётах особенно удобно в том случае, когда она не изменяется во времени т.е. на втором участке.

Показатели $P(t)$, $f(t)$ и $\lambda(t)$ являются взаимосвязанными и, зная один из них можно определить остальные (табл. 1).

Таблица 1.

| Заданный показатель | Определяемый показатель | | |
|---------------------|---|---|--------------|
| | $P(t)$ | $f(t)$ | $\lambda(t)$ |
| $P(t)$ | **** | $-dP(t)/dt$ | $f(t)/P(t)$ |
| $f(t)$ | $\int_t^{\infty} f(\tau)d\tau$ | **** | $f(t)/P(t)$ |
| $\lambda(t)$ | $\exp\left[-\int_0^t \lambda(\tau)d\tau\right]$ | $\lambda(t)\exp\left[-\int_0^t \lambda(\tau)d\tau\right]$ | *** |

Необходимо отметить, что зависимость $P(t) = \exp\left[-\int_0^t \lambda(\tau)d\tau\right]$ иногда трактуется как определение ВБР. На самом деле указанная зависимость появилась в связи с введением новой характеристики $\lambda(t)$.

Действительно, логарифмируя указанную зависимость и, подставляя в неё формулу (1.9) получим тождество

$$\ln P(t) = -\int_0^t \lambda(\tau)d\tau = \int_0^t \left[\frac{dP(\tau)/d\tau}{P(\tau)} \right] d\tau = \int_0^t \left[\frac{dP(\tau)}{P(\tau)} \right] = \ln P(t).$$

Рассмотренные показатели применяются в основном в том случае, когда изделие эксплуатируется только до первого отказа. В тоже время понятие вероятности безотказной работы имеет смысл и для случая восстанавливаемых изделий. При этом необходимо различать вероятность безотказной работы до первого отказа и между двумя соседними отказами. Следовательно, возникает необходимость в дополнительных характеристиках как, например вероятность восстановления после первого и последующего отказов, среднее время восстановления и т.д.

Рассмотрим восстанавливаемые изделия, при эксплуатации которых могут возникать отказы, не приводящие к каким-либо серьезным последствиям и легко устранимые. Эксплуатация подобных изделий состоит из повторяющихся этапов включающих период безотказной работы и время восстановления. Таким образом, моменты отказов образуют поток отказов, а моменты восстановлений – поток восстановлений.

В этом случае характеристикой безотказности может служить **мгновенный параметр потока отказов $z(t)$** : предел, если он существует, отношения среднего числа отказов ремонтируемого изделия в интервале времени $(t, t + Dt)$ к длине этого интервала Dt , стремящейся к нулю.

Примечание - Мгновенный параметр потока отказов выражен формулой

$$z(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0+} \frac{E[N(t + \Delta t) - N(t)]}{\Delta t},$$

где $N(t)$ - число отказов в интервале времени $(0, t)$;

E - математическое ожидание.

Средний параметр потока отказов $\bar{z}(t_1, t_2)$: среднее значение мгновенной интенсивности отказа в интервале времени (t_1, t_2) .

Примечание - Средний параметр потока отказов связан с мгновенным параметром потока отказов $z(t)$ следующим образом

$$\bar{z}(t_1, t_2) = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} z(t) dt.$$

Параметр потока отказов – это среднее число отказов изделия в единицу времени.

В случае стационарных потоков будем иметь $\mu(t) = T_{cp}^{-1}$, где T_{cp} – средняя наработка на отказ – отношение суммарной наработки восстанавливаемого изделия к математическому ожиданию числа его отказов в течение этой наработки. Средняя наработка на отказ является величиной обратной параметру потока отказов.

Статистическая оценка параметра потока отказов определяется соотношением

$$\mu(t) = \frac{\mu(t_2) - \mu(t_1)}{t_2 - t_1},$$

где $(t_2 - t_1)$ - конечный промежуток времени.

Статистическая оценка средней наработки на отказ определяется следующим образом

$$T_{cp.} = 1/\mu.$$

РЕФЛЕКСИЯ 2.

Работа организуется в группах. В каждой группе 4-5 человек.

Задание 1. Обсудите в группе то, что осталось неясным. Попробуйте в группе прояснить непонятные моменты.

Задание 2. Обоснуйте приведенные в таблице 1 зависимости. Обсудите в группах.

Выборочный опрос.

Задание 3. Ответьте в группе на контрольные вопросы. Ответы зафиксируйте в тетрадях:

1. В чём состоит отличие между терминами «наработка до отказа» и «ресурс».
2. Выработанный и остаточный ресурс изделия являются случайными или детерминированными величинами?
3. Величины $P(t)$, $f(t)$, $\lambda(t)$ являются размерными или безразмерными величинами?
4. Где имеют место наибольшие расхождения между значениями $f(t)$ и $\lambda(t)$?

Перед чтением мы отвечали на вопрос и на доске у нас зафиксированы ответы. Нуждаются ли они в исправлениях? Дополнениях? Осталось ли что-то непонятным? Общее обсуждение.

Часть 3. Экономические показатели

Беседа преподавателя. Помимо указанных показателей надёжности существует ряд других. Весьма важными показателями являются экономические показатели надёжности т.к. повышение безотказности и долговечности объектов, с одной стороны, связано с дополнительными материальными затратами, а с другой – с повышением эффективности капитальных вложений, уменьшения затрат труда на ремонт и обслуживание техники, с устранением потерь от простоя машин в ремонте.

ВЫЗОВ 3

Рассмотрим житейскую ситуацию (она распечатана для студентов).

Строители в коттеджном поселке предлагают сделать для стоянки машин у дома покрытие из брусчатки. При этом утверждают, что необходимо использовать под покрытие вместо обычной щебенки гранитную щебенку (которая используется на федеральных трассах), чтобы быть уверенными, что покрытие никогда не подвергнется никаким изменениям. Естественно, что это самый дорогой вид материала, что вызывает сомнения у хозяев о необходимости тратить деньги на такую дорогостоящую конструкцию. С другой стороны, они, естественно, хотят получить гарантию того, что с покрытием ничего не случится при эксплуатации.

Вопрос: Какие составляющие необходимо рассмотреть, чтобы выбрать наиболее оптимальный вариант «цена-качество» в данной ситуации?

Общее обсуждение, заполнение левого столбца таблицы с одновременной фиксацией на доске.

| Составляющие (до чтения) | Составляющие (после чтения) |
|--------------------------|-----------------------------|
| | |

ОСМЫСЛЕНИЕ 3.

Прочитаем материал и выясним, все ли мы учли.

Чтение текста

Важными показателями надежности являются экономические показатели надёжности т.к. повышение безотказности и долговечности изделий, с одной стороны, связано с дополнительными материальными затратами, а с другой – с повышением эффективности капитальных вложений, уменьшения затрат труда на ремонт и обслуживание техники, с устранением потерь от простоя машин в ремонте.

Экономическим показателем надёжности может служить, например, сумма затрат, связанных с изготовлением и эксплуатацией изделия, отнесенная к длительности его эксплуатации

$$K_э = \frac{Q_u + Q_э}{T_э},$$

где $K_э$ – экономический показатель надёжности (руб./час), Q_u – стоимость изготовления нового изделия (руб.), $Q_э$ – суммарные затраты на эксплуатацию, ремонт и обслуживание изделия (руб.), $T_э$ – период эксплуатации изделия (час).

При определении оптимального, с точки зрения экономических требований, уровня надёжности изделия необходимо учитывать то обстоятельство, что требования безотказности двояким образом связаны с затратами на изготовление и эксплуатацию изделия. При более высоких требованиях к безотказности работы изделия необходимы и повышенные затраты на его изготовление Q_u . Но зато при эксплуатации значение затрат $Q_э$ снижается. Поэтому если определить суммарные затраты на изготовление и эксплуатацию изделия как функцию от вероятности безотказной работы на заданном временном интервале, то минимум этой функции определит экономически оптимальный уровень безотказности изделия.

Выбор уровня надёжности, изменение его значения должен решаться с учетом экономической эффективности т.к. в большинстве случаев экономика является основным критерием для принятия решения.

Поиск различных вариантов рационального решения с учетом достижения требуемого уровня надёжности может исходить из условия получения наибольшего экономического эффекта с учетом затрат на всех стадиях жизни изделия. В общем случае экономический эффект состоит из двух основных факторов (рис. 2).

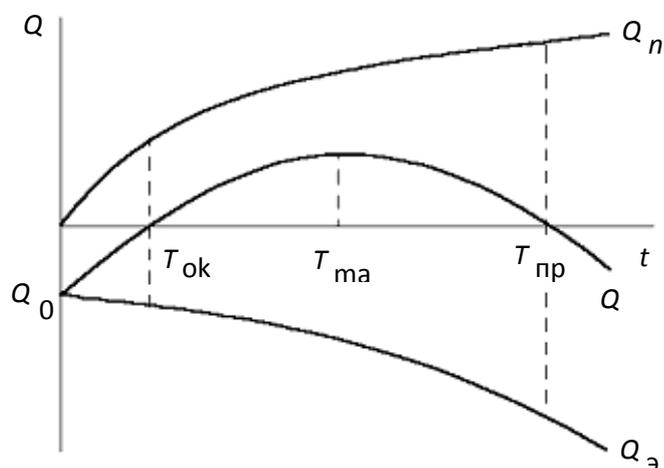


Рис. 2. Экономический эффект при эксплуатации изделия

Во-первых, затраты на создание изделия Q_u , включая затраты на проектирование, испытания и т.п., а также эксплуатацию изделия $Q_э(t)$, причем $Q_э(0) = Q_u$. Эти затраты являются отрицательными в общем балансе экономической эффективности. Во-вторых, прибыль, получаемая за счет функционирования изделия $Q_n(t)$. Суммарная эффективность $Q(t) = Q_э(t) + Q_n(t)$ имеет максимум и две точки достижения нулевого уровня.

Момент T_{OK} соответствует окончанию срока окупаемости т.е. когда изделие при своей эксплуатации возместил затраты на создание. Начиная с этого момента, эксплуатация изделия приносит прибыль. Однако в дальнейшем происходит снижение ее величины за счет увеличения затрат на обслуживание, ремонт и т.д. В момент T_{np} затраты на эксплуатацию сравниваются по величине с доходами и дальнейшая эксплуатация изделия становится экономически нецелесообразной. Длительность экономически целесообразной эксплуатации находится в интервале $[T_{max}, T_{np})$.

РЕФЛЕКСИЯ.

1. Обсуждение в группе, внесение дополнений в правый столбец таблицы и внесение изменений в левом столбце, если необходимо.

| Составляющие (до чтения) | Составляющие (после чтения) |
|--------------------------|-----------------------------|
| | |

2. Общее обсуждение. Фиксация на доске.

3. В рассмотренном примере не предусматривается извлечения прибыли в процессе эксплуатации. Придумайте вариант, в котором будет предусмотрено извлечение прибыли в процессе эксплуатации данного объекта. Какие составляющие необходимо внести в этом случае?
Обсуждение, фиксация.

Задачи в группу и по 1 задаче для самостоятельного решения

1.1. Проведены испытания 1000 однотипных изделий. За первые 3000 часов отказало 80 изделий, за интервал 3000-4000 час. отказало еще 50 изделий. Требуется определить частоту и интенсивность отказов изделий в интервале 3000-4000 час., вероятность безотказной работы за 3000 час. и 4000 час.

1.2. Проведены испытания 100 однотипных изделий. За первые 4000 часов отказало 50 изделий, за интервал 4000–4100 час. отказало еще 20 изделий. Требуется определить частоту и интенсивность отказов изделий в интервале 4000–4100 час., вероятность безотказной работы за первые 4000 час. и 4100 час., а также вероятность отказа на интервале 4000–4100 час.

1.3. В течение 1000 час. из 10 эксплуатируемых гироскопов отказало 2. За интервал 1000–1100 час. отказал еще один гироскоп. Требуется определить частоту и интенсивность отказов гироскопов в интервале 1000–1100 час.

1.4. Проведены испытания 400 резисторов. За время наработки 10^4 час. отказало 4 резистора, а за последующие 1000 час. отказал еще один резистор. Определить частоту и интенсивность отказов резисторов в интервале $10 \cdot 10^3$ – $11 \cdot 10^3$ час., вероятность отказа за время 10^4 час.

1.5. Проведены испытания N изделий. За время t час. отказало $n(t)$ штук изделий. На интервале $[t, t + \Delta t]$ отказало $n(\Delta t)$ изделий. По результатам испытаний требуется определить вероятность безотказной работы за время t и $t + \Delta t$, частоту отказов и интенсивность отказов на интервале Δt . Данные для решения приведены в таблице 2.

Таблица 2

Данные для задачи 1.5

| № варианта | N | t , час. | Δt , час | $n(t)$ | $n(\Delta t)$ |
|------------|------|------------|------------------|--------|---------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 5 |
| 1 | 1000 | 5000 | 1000 | 160 | 50 |
| 2 | 1000 | 4000 | 1000 | 130 | 30 |
| 3 | 1000 | 100 | 100 | 50 | 40 |
| 4 | 1000 | 200 | 100 | 90 | 32 |
| 5 | 45 | 10 | 10 | 19 | 13 |

| | | | | | |
|----|------|-------|------|-----|----|
| 6 | 45 | 60 | 40 | 44 | 1 |
| 7 | 45 | 5 | 5 | 1 | 5 |
| 8 | 45 | 0 | 10 | 0 | 19 |
| 9 | 1000 | 300 | 100 | 122 | 25 |
| 10 | 1000 | 290 | 100 | 535 | 40 |
| 11 | 1000 | 2000 | 100 | 380 | 12 |
| 12 | 1000 | 1500 | 100 | 315 | 13 |
| 13 | 1000 | 25000 | 1000 | 980 | 20 |
| 14 | 1000 | 9000 | 1000 | 340 | 30 |
| 15 | 1000 | 12000 | 1000 | 450 | 50 |
| 16 | 1000 | 6000 | 1000 | 210 | 40 |
| 17 | 1000 | 23000 | 1000 | 925 | 25 |
| 18 | 1000 | 16000 | 1000 | 630 | 50 |
| 19 | 1000 | 2800 | 100 | 505 | 30 |
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 5 |
| 20 | 1000 | 400 | 100 | 147 | 20 |
| 21 | 45 | 20 | 10 | 32 | 8 |
| 22 | 45 | 0 | 5 | 0 | 1 |
| 23 | 45 | 30 | 5 | 27 | 4 |
| 24 | 45 | 70 | 5 | 41 | 3 |

1.6. Проведены испытания 1000 однотипных изделий. Число отказавших изделий фиксировалось через каждые 1000 час. работы. Требуется определить вероятность безотказной работы, частоту отказов и интенсивность отказов для всех интервалов, построить графики этих функций, а также найти среднюю наработку до первого отказа. Данные об отказах приведены в таблице 3.

Таблица 3

Данные для задачи 1.6

| $\Delta t_i \cdot 10^{-3}$, час | $n(\Delta t_i)$ | $\Delta t_i \cdot 10^{-3}$, час | $n(\Delta t_i)$ | $\Delta t_i \cdot 10^{-3}$, час | $n(\Delta t_i)$ |
|----------------------------------|-----------------|----------------------------------|-----------------|----------------------------------|-----------------|
| 0–1 | 20 | 9–10 | 30 | 18–19 | 50 |
| 1–2 | 25 | 10–11 | 40 | 19–20 | 35 |
| 2–3 | 35 | 11–12 | 40 | 20–21 | 35 |
| 3–4 | 50 | 12–13 | 50 | 21–22 | 50 |
| 4–5 | 30 | 13–14 | 40 | 22–23 | 35 |
| 5–6 | 50 | 14–15 | 50 | 23–24 | 25 |
| 6–7 | 40 | 15–16 | 40 | 24–25 | 30 |
| 7–8 | 40 | 16–17 | 50 | 25–26 | 20 |
| 8–9 | 50 | 17–18 | 40 | – | – |

1.7. По результатам наблюдения за 45 изделиями радиоэлектронного оборудования, которые прошли 80-ти часовую приработку, получены данные до первого отказа всех 45 изделий. Требуется определить вероятность безотказной работы, частоту отказов и интенсивность отказов для всех интервалов, построить графики этих функций, а также найти среднюю наработку до первого отказа. Данные об отказах приведены в таблице 4.

Таблица 4

Данные для задачи 1.7

| Δt_i , час | $n(\Delta t_i)$ | Δt_i , час | $n(\Delta t_i)$ |
|--------------------|-----------------|--------------------|-----------------|
| 0–10 | 19 | 40–50 | 0 |
| 10–20 | 13 | 50–60 | 1 |
| 20–30 | 8 | 60–70 | 1 |

| | | | |
|-------|---|--|--|
| 30–40 | 3 | | |
|-------|---|--|--|

1.8. Проведены испытания трех групп однотипных изделий. В каждой группе испытывалось по 100 изделий и их испытания проводились для первой группы – 550 час., для второй – 400 час. и для третьей – 200 час. Требуется определить вероятность безотказной работы, частоту отказов и интенсивность отказов для всех интервалов, построить графики этих функций, а также найти среднюю наработку до первого отказа. Данные об отказах приведены в таблице 5.

Таблица 5

Данные для задачи 1.8

| Δt_i , час | Δt_i | | | $\Sigma n(\Delta t_i)$ группа |
|--------------------|--------------|-----------|------------|-------------------------------|
| | I группа | II группа | III группа | |
| 0?25 | 4 | 6 | 5 | 15 |
| 25?50 | 8 | 9 | 8 | 25 |
| 50?75 | 6 | 5 | 7 | 18 |
| 75?100 | 3 | 4 | 5 | 12 |
| 100?150 | 5 | 5 | 6 | 16 |
| 150?200 | 4 | 3 | 3 | 10 |
| 200?250 | 1 | 3 | ? | 4 |
| 250?300 | 2 | 2 | ? | 4 |
| 300?400 | 3 | 4 | ? | 7 |
| 400?550 | 5 | ? | м | 5 |

1.9. Частота отказов изделия имеет вид $f(t) = 2\lambda e^{-\lambda t}(1 - e^{-\lambda t})$. Требуется определить ВБР, интенсивность отказов, среднее время до отказа.

1.10. Вероятность безотказной работы изделия имеет вид $P(t) = 3e^{-\lambda t} - 3e^{-2\lambda t} + e^{-3\lambda t}$. Требуется найти частоту и интенсивность отказов, среднюю наработку до первого отказа.

1.11. Частота отказов изделия имеет вид $f(t) = 6\lambda e^{-2\lambda t} (1 - e^{-\lambda t})$. Требуется определить среднюю наработку до первого отказа.

1.12. Интенсивность отказов изделия имеет вид $\lambda(t) = k(1 - e^{-kt}) / (1 - 0.5e^{-kt})$. Требуется найти ВБР, частоту отказов, среднюю наработку до первого отказа.

1.13. Интенсивность отказов изделия имеет вид $\lambda(t) = k^2 t / (1 + kt)$. Требуется найти ВБР, частоту и интенсивность отказов, среднюю наработку до первого отказа.

3. Общая теория надёжности

Занятие 4

Цели занятия: Рассмотреть общий подход к формулировке задачи теории надёжности. Дать понятия пространств качества, нагрузки, состояния. Привести математическую постановку задачи надёжности.

Необходимые пояснения. Рассматривается системный подход к математической формулировке задачи теории надёжности, который может использоваться в различных областях. Разъясняются содержания операторов, входящих в формулировку, приводятся примеры их конкретного содержания для ряда типовых задач механики конструкций.

ВЫЗОВ

Вопросы преподавателя

1. Какие общие характерные черты можно выделить в системной, параметрической и теории надёжности машин и конструкций?
2. Как вы понимаете термин «постановка задачи».
3. Какие факторы должны быть учтены при постановке задачи теории надёжности? (внешние и внутренние с учетом вероятностной природы и временной фактор)

ОСМЫСЛЕНИЕ

Чтение текста. Работа индивидуальная.

Постановка задачи теории надёжности

Приведем общую постановку задач теории надёжности позволяющую учитывать как вероятностную природу внешних и внутренних факторов, определяющих работоспособное состояние объекта, так и временной фактор.

Рассмотрим процесс функционирования объекта с учетом его взаимодействия с окружающей средой.

Пусть на объект действует совокупность внешних воздействий той или иной природы, которую представим в виде вектора \mathbf{q} с компонентами $q_i(t), i = \overline{1, k}$. Каждый элемент вектора \mathbf{q} отражает некоторое воздействие на объект. В общем случае, оно может зависеть от времени и иметь вероятностный характер. Пространство Q размерности k , в котором определен вектор \mathbf{q} , назовем пространством нагрузок. Очевидно, что конец вектора \mathbf{q} с течением времени описывает в этом пространстве некоторую траекторию (рис. 1).

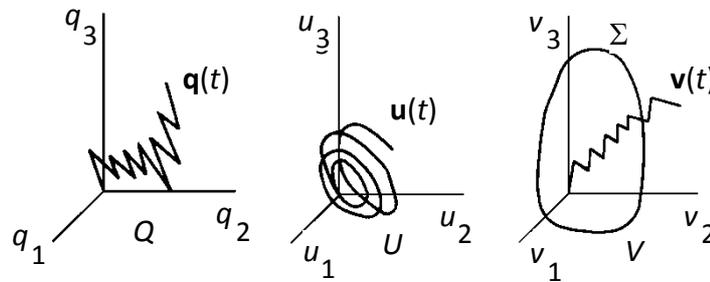


Рис. 1. Постановка задачи теории надёжности

Состояние объекта, находящегося под воздействием внешних факторов \mathbf{q} , характеризуется набором параметров $u_i(t), i = \overline{1, m}$. Данные параметры изменяются с течением времени и могут иметь стохастическую природу. Возможное состояние объекта характеризуется вектором \mathbf{u} с компонентами $u_i(t)$. Вектор \mathbf{u} принадлежит пространству U размерности m – пространству состояний. Размерность пространства состояний определяется выбором расчетной схемы. Процесс изменения параметров объекта с течением времени может быть представлен в виде траектории конца случайного вектора \mathbf{u} в m -мерном фазовом пространстве U . Начальное состояние объекта описывается либо начальными значениями параметров $u_{i0} = u_i(t_0), i = \overline{1, m}$, либо совместной функцией плотности распределения $f_0(u_1, \dots, u_l), i = \overline{1, l}, (l \leq m)$, если значения параметров в начальный момент имеют случайный характер.

Предполагается, что между векторами \mathbf{q} и \mathbf{u} существует зависимость

$$\mathbf{u} = H(\mathbf{q}), \quad (1)$$

где H – некоторый оператор, описывающий уравнения состояния объекта и метод расчета, а также начальные условия.

Различные требования, связанные с эксплуатацией объекта (безопасность, экономичность, точность функционирования и т.п.), могут быть сформулированы в виде ограничений на параметры объекта, как входящие в вектор состояния \mathbf{u} , так и не входящие в него, но определяемые через его компоненты. Совокупность этих параметров $v_i(t), i = \overline{1, p}$ позволяет определить вектор качества \mathbf{v} в пространстве V размерности p -пространстве качества. Каждой траектории из пространства состояний U будет соответствовать траектория в пространстве качества V . В частном случае эти пространства могут совпадать.

Предполагается, что существует связь между векторами состояния \mathbf{u} и качества \mathbf{v}

$$\mathbf{v} = M(\mathbf{u}), \quad (2)$$

где оператор M считается заданным.

Множество значений вектора \mathbf{v} , допустимых с точки зрения требований нормативно-технической и (или) конструкторской (проектной) документации, образуют в пространстве качества V область Ω . Поверхность Σ , ограничивающая область Ω , не принадлежит ей и соответствует множеству значений вектора качества \mathbf{v} , при которых наступает отказ. Геометрия, свойства, размеры предельной поверхности Σ зависят от требований к работоспособности объекта. Необходимо подчеркнуть, что предельная поверхность Σ может зависеть от времени и иметь случайный характер.

Естественно предполагать, что в начальный момент времени $t = t_0$ вектор качества находится в допустимой области Ω . В этом случае первое пересечение процессом $\mathbf{v}(t)$ изнутри предельной поверхности Σ соответствует наступлению отказа, т.е. нарушению работоспособного состояния объекта.

На стадии проектирования информация о внешних воздействиях на проектируемый объект, его свойствах носит априорный характер, а процессы $\mathbf{q}(t)$, $\mathbf{u}(t)$ и $\mathbf{v}(t)$ являются случайными процессами. При этом пересечение изнутри поверхности Σ вектором \mathbf{v} также случайное событие.

Вероятность безотказной работы объекта на отрезке $[t_0, t]$ равна вероятности пребывания вектора \mathbf{v} в допустимой области Ω

$$P(t) = \mathbf{P}\{\mathbf{v}(\tau) \in \Omega, \tau \in [t_0, t]\}. \quad (3)$$

Полная постановка задачи теории надёжности для объекта включает:

- определение пространств нагрузок Q , состояний,
- определение операторов H, M ,
- выбор пространства качества V и предельной поверхности Σ .

- главной искомой характеристикой является вероятность безотказной работы $P(t)$.

В процессе эксплуатации для индивидуального объекта возможно получение дополнительной информации об изменении его свойств, эксплуатационных нагрузках и ряде других характеристик на некотором конечном временном интервале $[t_r, t_k]$.

Постановка задачи о нахождении вероятности безотказной работы конкретного объекта с учетом дополнительной информации в этом случае будет иметь вид:

$$P(t|T_k) = \mathbf{P}\{\mathbf{v}(\tau|T_k) \in \Omega(T_k), \tau \in (t_k, t)\}, \quad (4)$$

где T_k – время последнего наблюдения на отрезке $[t_r, t_k]$. Необходимо подчеркнуть, что до момента t_k вектор качества $\mathbf{v}(t) \in \Omega$.

Для решения ряда задач надёжности, в частности задачи о прогнозировании индивидуальных характеристик объекта, целесообразно ввести диагностическое пространство W . Предполагается, что в процессе эксплуатации конкретного объекта измеряются некоторые его параметры, анализ значений которых дает возможность оценить текущее состояние объекта. Совокупность этих параметров $w_i, i = \overline{1, n}$, измеряемых в течение некоторого временного интервала $[t_l, t_m], l < m < n$ (дискретно или непрерывно) образует диагностический вектор \mathbf{w} .

РЕФЛЕКСИЯ

Работа организуется в группах.

Задание 1. Заполните таблицу

Постановка задачи

| Основные составляющие постановки задачи | Содержание основных составляющих | Основные соотношения |
|---|----------------------------------|----------------------|
| 1. векторы состояний | | |
| 2. прогнозирование на стадии проектирования и эксплуатации: | | |
| 2.1 вектор качества (с.27) | | |
| 2.2 вектор повреждений (накопление) | | |

| | | |
|--|--|--|
| повреждений) | | |
| 3. Прогнозирование остаточного ресурса | | |
| 3.1. Информация об эксплуатации | | |
| 3.2. Модель объекта | | |

Задание 2. Сформулируйте постановки Ваших задач с использованием введённого подхода, сравните с ранее полученными результатами. Выявите различие.

Презентация у доски.

Задание 3. Ответьте на следующие вопросы:

1. Каковы основные составляющие теории надёжности?
2. Почему в теории надёжности широко используется аппарат теории вероятностей?
3. Могут ли совпадать между собой пространства качества и состояний?
4. В чём состоит различие постановки задачи надёжности в случаях выпуклой и вогнутой предельной поверхности Σ ?
5. В чём различие задач прогнозирования ресурса объекта на стадии проектирования и остаточного ресурса?

Задание 4. Запишите постановки задачи теории надёжности (определите пространства, операторы, ВБР) для одного следующих вариантов прочностных конструкций:

Вар.1. Шарнирно-опёртая балка постоянного поперечного сечения нагружена посередине переменной сосредоточенной силой $Q(t)$, описываемой стационарным случайным процессом. Эффективная частота случайного процесса $Q(t)$ много меньше низшей собственной частоты балки, т.е. процесс нагружения можно рассматривать как квазистатический. Нормальная эксплуатация балки возможна при отсутствии пластических деформаций. Необходимо дать полную постановку задачи теории надёжности.

Вар. 2. На элемент конструкции (стержень круглого сечения) действует крутящий момент M , являющийся с.в. Необходимо дать варианты полной постановки задачи теории надёжности.

Вар. 3. Балка на двух опорах прямоугольного сечения нагружена силой Q , являющейся с.в. Предел прочности R материала, из которого изготовлена балка также является с.в. Необходимо дать варианты полной постановки задачи теории надёжности.

Задание 5. Подготовить и представить презентацию. Сравнение постановок, представленных различными группами

Занятие 5. Накопление необратимых повреждений.

Цели занятия. Привести примеры потери надежности конструкций из-за накопления необратимых повреждений. Описать характерные черты процесса накопления необратимых повреждений, ведущих к отказу. Сформулировать математический подход к описанию процесса накопления повреждений - уравнение накопления повреждений

Необходимые пояснения. На занятии рассматриваются некоторые физико-механические процессы, ведущие к изменению свойств объектов и достижения объектами предельных состояний.

ВЫЗОВ

1. Приведите примеры необратимых процессов, ведущих к изменению свойств механических объектов
2. Дайте определение понятия «повреждение»

ОСМЫСЛЕНИЕ

Чтение текста. Работа индивидуальная.

Закономерности процессов накопления повреждений

Изменение начальных свойств и состояние материалов, из которых выполнен объект, является основной причиной потери им работоспособности. Для оценки надёжности объекта необходимо иметь информацию о скорости и закономерностях протекания процессов, ведущих к изменению начальных характеристик объекта. Одним из возможных подходов к решению данной задачи является предположение о том, что вектор повреждения удовлетворяет векторному дифференциальному уравнению вида

$$\frac{dv}{dt} = f(v, q(t), a), \text{ где } \mathbf{q}(t) \text{ – вектор внешних воздействий.}$$

Вид функции $f(\cdot)$ может быть получен на основе рассмотрения физики процесса или с использованием феноменологического подхода. Смысл меры повреждения $v(t)$ определяется в каждом конкретном случае.

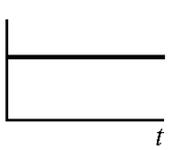
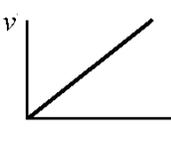
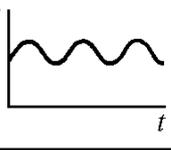
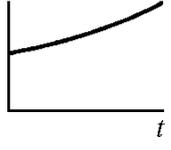
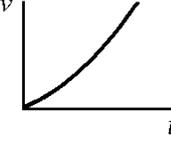
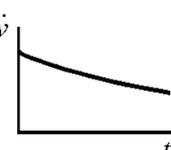
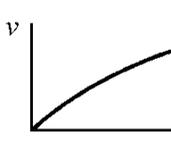
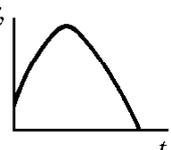
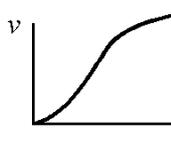
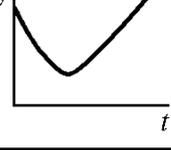
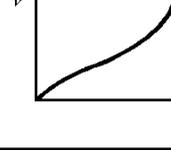
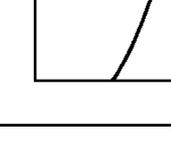
Некоторые закономерности протекания процессов накопления повреждений представлены в табл. 1.

Все рассматриваемые функциональные зависимости проявляются в процессе эксплуатации объекта как случайные процессы. Это связано со следующими основными причинами: во-первых, начальные свойства

материала и геометрические параметры объекта имеют разброс; во-вторых, стохастическая природа процессов накопления повреждений связана с широкой вариацией режимов работы и условий эксплуатации объектов.

Таблица 1.

Закономерности процессов накопления повреждений

| Типы процессов | | Скорость накопления повреждений $\dot{v} = dv/dt$ | Закономерность накопленного повреждения $v(t)$ | Примеры процессов накопления повреждений |
|-----------------|--------------------|---|--|---|
| Стационарные | Постоянные |  |  | Износ: $v = kt$ |
| | Псевдостационарные |  |  | Износ при переменных режимах |
| Монотонные | Возрастающие |  |  | Износ при засорении поверхностей $v = kt^n; n > 1$ $v = A(e^{kt} - 1)$ Рост макротрещин $da/dN = C(\Delta K)^m$ |
| | Убывающие |  |  | Износ в период приработки, распад мартенсита |
| Экстремальные | с максимумом |  |  | Коррозия $\dot{v} = ate^{-bt}$ |
| | с минимумом |  |  | Ползучесть |
| С запаздыванием | |  |  | Многоцикловая усталость |

РЕФЛЕКСИЯ

Работа в группах.

Задание 1. Определите смысл понятия накопления повреждения для процессов износа, ползучести, многоциклового усталости, распространения макротрещин.

Задание 2. Как определяется вектор качества в каждом случае, представить возможные варианты условия отказа?

Задание 3. Приведите примеры дифференциального уравнения накопления повреждений.

Задание 4. Подготовить и выступить с презентацией у доски.

4. Надёжность объектов до первого отказа

Занятие 6.

Экспоненциальный закон надёжности

Цели занятия: Подчеркнуть стохастический характер внешних воздействий, механических, физико-химических и геометрических характеристик объектов. Особо остановиться на случайном характере величины ресурса. Отметить сложившиеся подходы к описанию с.в. ресурса.

Экспоненциальный закон и его применимость в теории надёжности. Рассмотреть наиболее характерные теоретические распределения, используемые в теории надёжности.

Ход занятия

ВЫЗОВ

Вопросы преподавателя

1. Что такое случайная величина? Где встречается это понятие?
2. Чем характеризуется с.в.?
3. Приведите примеры известных вам с.в.

4. Почему в теории надёжности широко используется аппарат теории вероятности, теории случайных процессов и математической статистики?
5. Приведите примеры объектов, работающих до первого отказа.

Вводная беседа преподавателя

ВБР в большинстве случаев применяются наиболее распространенные распределения, они имеют различные области применения, которые можно связать с интенсивностью отказов. На сегодняшнем занятии мы изучим применение типовых распределений к задачам теории надежности.

1. Экспоненциальное распределение.
2. Гамма-распределение
3. Нормальное распределение
4. Логарифмически-нормальное распределение
5. Распределение Вейбулла

Работа организуется в группах из 4-х человек. Каждый участник группы получает свою часть материала.

- 1 – экспоненциальное распределение (без изучения теорем) и гамма – распределение
- 2 - нормальное распределение
- 3 – логарифмически-нормальное распределение
- 4 – распределение Вейбулла

ОСМЫСЛЕНИЕ

Изучение своей части текста. Работа индивидуальная.

Текст 1.

Интенсивность отказов и классификация распределений

Основной характеристикой определяющей надёжность объекта является вероятность безотказной работы

$$P(t) = \mathbf{P}\{\mathbf{v}(\tau) \in \Omega, \tau \in [0, t]\}$$

и связанная с ней величина $F(t)$ – функция распределения времени до отказа.

В теории надёжности недостаточно полно изучен вопрос об истинных законах распределения наработки объекта до отказа т.к. процесс нахождения вида распределения является весьма сложным и, в большинстве случаев, не удаётся получить точное решение.

В тоже время, исходя из различных дополнительных соображений, накопленного опыта в теории надёжности активно и успешно применяются некоторые широко распространённые виды распределений, в том числе, нормальное, экспоненциальное и т.д.

Классификацию таких распределений можно связать с широко используемой в теории надёжности характеристикой как $\lambda(t)$ – интенсивность отказов.

Типичной формой кривой, описывающей изменение указанной характеристики во времени, является «корыто»образная кривая (Рис. 1).

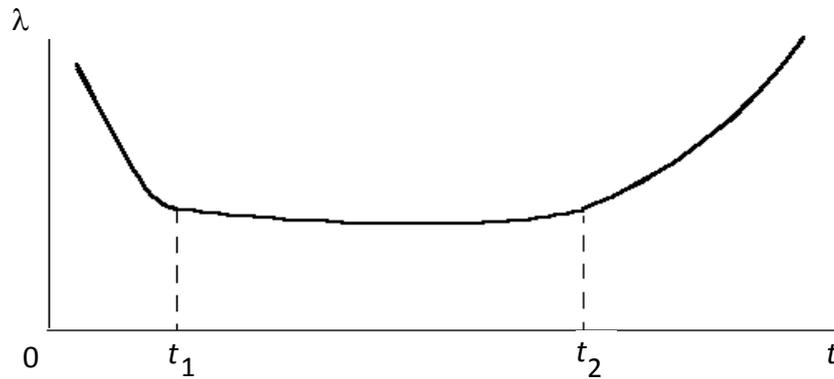


Рис. 1 Кривая интенсивности отказов

На ней обычно выделяют три основных периода: период приработки, период нормальной работы и период старения.

Условная вероятность безотказной работы объекта в течение промежутка времени $[t, t + \tau)$ в предположение о том, что объект проработал безотказно в промежутке $[0, t)$ в соответствии с теоремой о полной вероятности запишется

$$P(t + \tau | t) = \frac{P(t + \tau)}{P(t)}. \quad (1)$$

Предположим, что для объекта условная ВБР в течение промежутка $[t, t + \tau)$ остаётся постоянной вне зависимости от предыдущего времени безотказной работы. Т.е. можно записать $P(t + \tau | t) = P(\tau)$ и представить (1) в виде

$$P(t + \tau) = P(t)P(\tau); \tau \geq 0. \quad (2)$$

Решением (2) с учётом требований накладываемых на $P(t)$ является функция

$$P(t) = e^{-\lambda t}, t \geq 0. \quad (3)$$

Согласно (2), (3) интенсивность отказов $\lambda(t)$ есть константа.

Следовательно, на участке нормальной работы, интенсивность отказов близка к постоянной величине ВБР описывается экспоненциальным распределением.

Если условная ВБР является не возрастающей функцией от времени, то говорят, что объект стареет во времени. В этом случае интенсивность отказов $\lambda(t)$ будет являться возрастающей функцией, что соответствует третьему периоду – периоду старения. Отказы в этот период носят постепенный характер и связаны с физико-химическими процессами, происходящими в объекте и приводящими к накоплению необратимых повреждений.

Распределение времени до отказа $F(t)$ называется ВФИ (УФИ), если ему соответствует возрастающая (убывающая) по t функция интенсивности отказов.

1.1. Внезапный отказ

В период нормальной эксплуатации объекта его отказы носят преимущественно мгновенный, внезапный характер. Они возникают из-за неблагоприятного сочетания внешних и внутренних факторов. Внезапные отказы носят неожиданный характер, как правило, без проявления предшествующих симптомов разрушения.

Хорошее описание ВБР объектов, не подвергающихся старению, отказы которых носят внезапный характер, даёт экспоненциальное распределение (рис. 2).

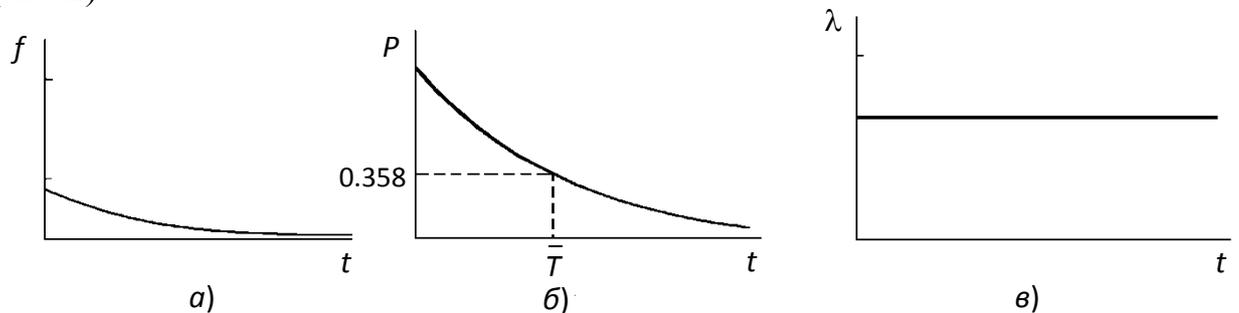


Рис. 2 Экспоненциальное распределение, а – функция плотности распределения времени до отказа, б – функция ВБР, в – функция интенсивности отказов

Функция экспоненциального распределения имеет вид

$$F(t) = \mathbf{P}\{T < t\} = 1 - e^{-\lambda t} \quad \text{для } t \geq 0, \quad (4)$$

где λ – постоянная, положительная величина.

Согласно (4) ВБР примет вид

$$P(t) = 1 - F(t) = e^{-\lambda t} \quad \text{для } t \geq 0, \quad (5)$$

а плотность распределения

$$f(t) = \lambda e^{-\lambda t} \quad \text{для } t \geq 0. \quad (6)$$

Экспоненциальный закон успешно применяется в теории надёжности. В случае экспоненциального закона оказывается возможным получить в замкнутом виде решение многих задач теории надёжности.

1.2. Постепенные отказы

Рассмотрим некоторые параметрические распределения, используемые для описания ВБР в случае, когда интенсивность отказов является возрастающей функцией времени, т.е. распределение типа ВФИ. При этом основной причиной отказа объекта являются процессы старения, ведущие к изменению параметров, определяющих работоспособность объекта. Отказ возникает при достижении параметром (параметрами) допустимого значения.

Гамма-распределение

Функция ВБР имеет вид

$$P(t) = \frac{\mu^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \int_t^\infty x^{\alpha-1} e^{-\mu x} dx, \quad (9)$$

а функция плотности распределения времени до отказа

$$f(t) = -\dot{P}(t) = \begin{cases} \frac{\mu^\alpha t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} e^{-\mu t}, & t \geq 0, \\ 0, & t < 0, \end{cases} \quad (10)$$

где $\Gamma(\alpha)$ – гамма-функция, определяемая формулой $\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty x^{\alpha-1} e^{-x} dx$,

$\alpha > 0$ – параметр формы, $\mu > 0$ – параметр масштаба.

В теории надёжности гамма-распределение в основном применяется в случае, когда α является целым числом. При целом α гамма-распределение является распределением суммы α независимых случайных величин, подчиняющихся экспоненциальному закону с параметром μ . Ввиду того, что при целом α справедливо соотношение $\Gamma(\alpha) = (\alpha - 1)!$ будем иметь

$$\begin{aligned} P(t) &= \exp(-\mu t) \sum_{i=0}^{\alpha-1} \frac{(\mu t)^i}{i!}, \\ f(t) &= \frac{\mu^\alpha t^{\alpha-1}}{(\alpha - 1)!} \exp(-\mu t), \\ \lambda(t) &= \frac{\mu^\alpha t^{\alpha-1}}{(\alpha - 1)! \sum_{i=0}^{\alpha-1} \frac{(\mu t)^i}{i!}}. \end{aligned} \quad (11)$$

При $\alpha = 1$ данное распределение совпадает с экспоненциальным распределением.

Вид функций $f(t), P(t), \lambda(t)$ представлен на рис. 3. Функция интенсивности отказов является возрастающей для $\alpha > 1$, а для $\alpha < 1$ – убывающей.

Величины математического ожидания и дисперсии времени до отказа равны

$$ET = \alpha/\mu, \quad DT = \alpha/\mu^2. \quad (12)$$

Отметим, что при увеличении величины параметра α гамма-распределение стремится к нормальному распределению с параметрами $N(\alpha ET; \alpha DT)$ или, $N(\alpha^2/\mu; \alpha^2/\mu^2)$, а коэффициент асимметрии стремится к нулю. Переход от гамма-распределения к нормальному распределению считается обоснованным, если выполняются условия $ET/DT = \sqrt{\alpha} > 3,5$ или $\alpha > 12$.

Можно показать, что гамма – распределение является результатом решения задачи о нахождении ВБР объекта при следующих предположениях: скорость накопления повреждения в среднем постоянна и имеет случайные вариации, качество объектов перед началом эксплуатации однородно.

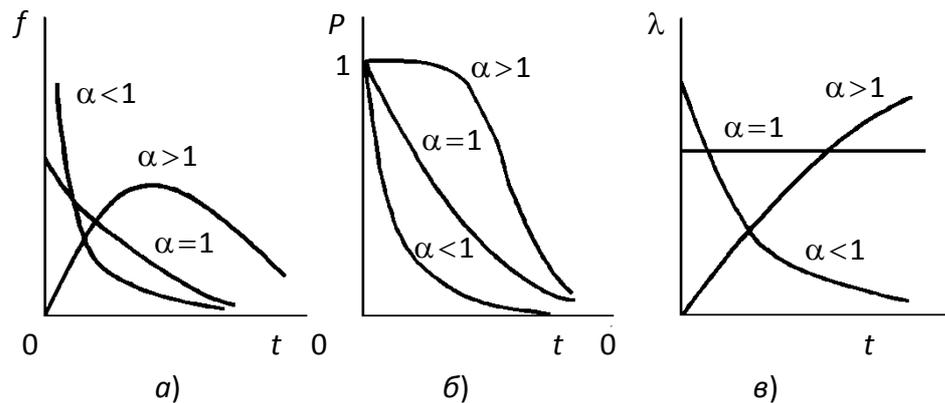


Рис. 3. Гамма-распределение распределение, а – функция плотности распределения времени до отказа, б – функция ВБР, в – функция интенсивности отказов

Текст 2. Интенсивность отказов и классификация распределений

Основной характеристикой определяющей надёжность объекта является вероятность безотказной работы

$$P(t) = \mathbf{P}\{\mathbf{v}(\tau) \in \Omega, \quad \tau \in [0, t]\}$$

и связанная с ней величина $F(t)$ – функция распределения времени до отказа.

В теории надёжности недостаточно полно изучен вопрос об истинных законах распределения наработки объекта до отказа т.к. процесс нахождения вида распределения является весьма сложным и, в большинстве случаев, не удаётся получить точное решение.

В тоже время, исходя из различных дополнительных соображений, накопленного опыта в теории надёжности активно и успешно применяются некоторые широко распространённые виды распределений, в том числе, нормальное, экспоненциальное и т.д.

Классификацию таких распределений можно связать с широко используемой в теории надёжности характеристикой как $\lambda(t)$ – интенсивность отказов.

Типичной формой кривой, описывающей изменение указанной характеристики во времени, является «корыто»образная кривая (Рис. 1).

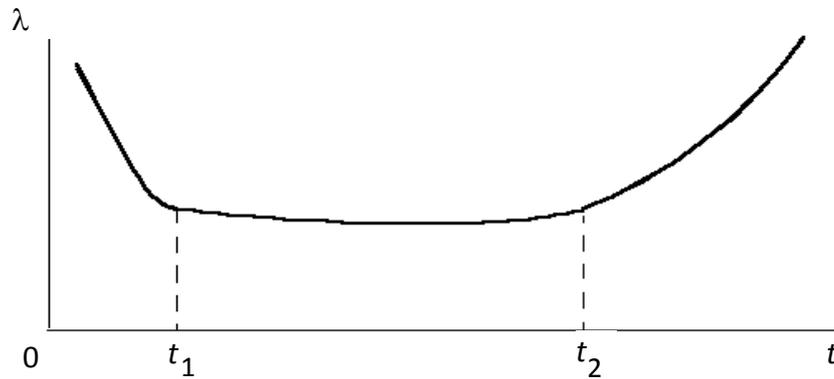


Рис. 1 Кривая интенсивности отказов

На ней обычно выделяют три основных периода: период приработки, период нормальной работы и период старения.

Условная вероятность безотказной работы объекта в течение промежутка времени $[t, t + \tau)$ в предположение о том, что объект проработал безотказно в промежутке $[0, t)$ в соответствии с теоремой о полной вероятности запишется

$$P(t + \tau | t) = \frac{P(t + \tau)}{P(t)}. \quad (1)$$

Предположим, что для объекта условная ВБР в течение промежутка $[t, t + \tau)$ остаётся постоянной вне зависимости от предыдущего времени безотказной работы. Т.е. можно записать $P(t + \tau | t) = P(\tau)$ и представить (1) в виде

$$P(t + \tau) = P(t)P(\tau); \tau \geq 0. \quad (2)$$

Решением (2) с учётом требований накладываемых на $P(t)$ является функция

$$P(t) = e^{-\lambda t}, t \geq 0. \quad (3)$$

Согласно (2), (3) интенсивность отказов $\lambda(t)$ есть константа.

Следовательно, на участке нормальной работы, интенсивность отказов близка к постоянной величине ВБР описывается экспоненциальным распределением.

Если условная ВБР является не возрастающей функцией от времени, то говорят, что объект стареет во времени. В этом случае интенсивность отказов $\lambda(t)$ будет являться возрастающей функцией, что соответствует третьему периоду – периоду старения. Отказы в этот период носят постепенный характер и связаны с физико-химическими процессами, происходящими в объекте и приводящими к накоплению необратимых повреждений.

Распределение времени до отказа $F(t)$ называется ВФИ (УФИ), если ему соответствует возрастающая (убывающая) по t функция интенсивности отказов.

Нормальное распределение

Нормальное распределение является одним из самых универсальных и широко используемых в теории надёжности. С помощью нормального распределения хорошо описываются такие случайные величины как наработка до отказа многих восстанавливаемых и невосстанавливаемых изделий, геометрические размеры деталей, ошибки измерений и т.д.

Плотность нормального распределения имеет вид

$$f(t) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(t-c)^2}{2\sigma^2}\right). \quad (13)$$

Нормальное распределение определено на интервале $(-\infty, \infty)$. Естественно что, в задачах надёжности время безотказной работы не может быть отрицательной величиной. Данное противоречие является следствием того, что нормальное распределение даёт асимптотическое описание времени до отказа. Обычно нормальное распределение используется при больших значениях α и вероятность

$$\mathbf{P}\{T \leq 0\} = \int_{-\infty}^0 f(t)dt$$

является очень малой величиной, которой можно при расчётах пренебречь.

Часто применяется усечённое нормальное распределение, плотность которого имеет вид

$$f_*(t) = \alpha f(t) = \frac{\alpha}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left[-(t-c)^2 / 2\sigma^2\right], t \in [t_1, t_2], \quad (14)$$

здесь $\alpha = \left[\int_{t_1}^{t_2} f(t) dt \right]^{-1}$ является нормирующим множителем,

обеспечивающим выполнение условия нормировки.

Введя замену $u = (t - c)/\sigma$ можно записать $\alpha = [(\Phi(u_2) - \Phi(u_1))]$, где $u_i = (t_i - c)/\sigma$, $i = 1, 2$; $\Phi(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^u \exp\left(-\frac{v^2}{2}\right) dv$ – нормированная функция Лапласа.

Функция ВБР для усечённого закона запишется

$$P(t) = \alpha \left[0,5 - \Phi\left(\frac{t - c}{\sigma}\right) \right]$$

Уже при $c > 2\sigma$, что обычно и имеет место на практике при использовании нормального распределения, значение нормирующего множителя α близко к 1.

Интенсивность отказов $\lambda(t)$ для нормального распределения является монотонно возрастающей функцией (рис. 4), стремящейся к асимптоте с уравнением $y = (t - c)/\sigma$

$$\lambda(t) = \frac{\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{(t - c)^2}{2\sigma^2}\right]}{0,5 - \Phi\left(\frac{t - c}{\sigma}\right)}$$

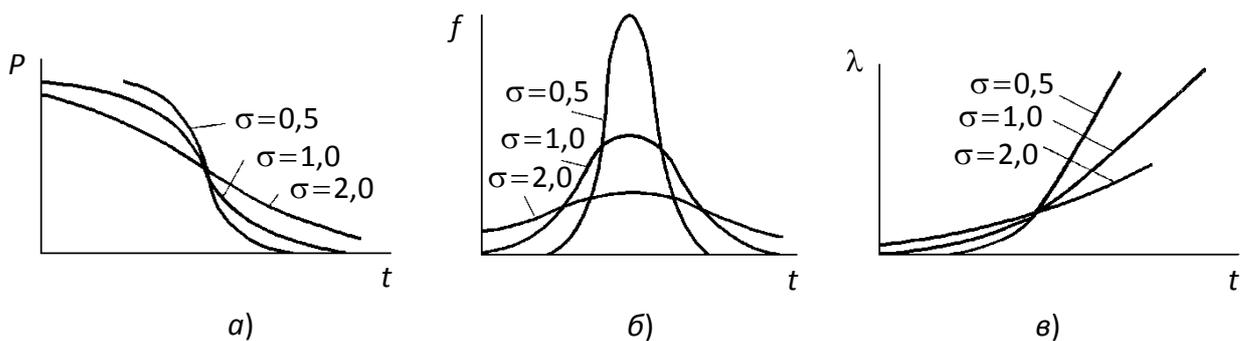


Рис. 4. Нормальное распределение, а – функция плотности распределения времени до отказа, б – функция ВБР, в – функция интенсивности отказов

Числовые характеристики – математическое ожидание и дисперсия наработки до отказа равны

$$ET = c, DT = \sigma^2.$$

Нормальное распределение времени до отказа, является следствием однородности качества объекта, постоянной средней скорости накопления повреждений и хорошей перемешиваемости реализаций.

В частности, к нормальному распределению приводит следующая модель. Пусть работоспособное состояние объекта определяется одним параметром v . Предположим, что начальный разброс значений данного параметра определяется нормальным законом и имеет малую дисперсию, т.е. малый разброс свойств. Пусть в процессе эксплуатации параметр v меняется по детерминированному закону $g(t, v_0)$, где $v_0 = v(0)$. Считаем также, что имеет место $v(t_2) \geq v(t_1)$ для $t_2 > t_1$, а условие отказа представляется в виде $v(t) = v_*$.

Таким образом, момент отказа определяется из уравнения $g(t, v_0) = v_*$ и равен $T_* = \varphi(v_0, v_*)$, где φ – обратная к f функция. Ввиду того, что с.в. v_0 имеет малую дисперсию можно записать $T_* = \varphi(a, v_*) + \varphi'_a(a, v_*)(v_0 - a) + o(v_0)$.

Отсюда следует, что если с.в. v_0 является с.в. с нормальным распределением, то и с.в. T_* также описывается нормальным законом.

Текст 3. Интенсивность отказов и классификация распределений

Основной характеристикой определяющей надёжность объекта является вероятность безотказной работы

$$P(t) = \mathbf{P}\{\mathbf{v}(\tau) \in \Omega, \tau \in [0, t]\}$$

и связанная с ней величина $F(t)$ – функция распределения времени до отказа.

В теории надёжности недостаточно полно изучен вопрос об истинных законах распределения наработки объекта до отказа т.к. процесс нахождения вида распределения является весьма сложным и, в большинстве случаев, не удаётся получить точное решение.

В тоже время, исходя из различных дополнительных соображений, накопленного опыта в теории надёжности активно и успешно применяются некоторые широко распространённые виды распределений, в том числе, нормальное, экспоненциальное и т.д.

Классификацию таких распределений можно связать с широко используемой в теории надёжности характеристикой как $\lambda(t)$ – интенсивность отказов.

Типичной формой кривой, описывающей изменение указанной характеристики во времени, является «корыто»образная кривая (Рис. 1).

Рис. 1 Кривая интенсивности отказов

На ней обычно выделяют три основных периода: период приработки, период нормальной работы и период старения.

Условная вероятность безотказной работы объекта в течение промежутка времени $[t, t + \tau)$ в предположение о том, что объект проработал безотказно в промежутке $[0, t)$ в соответствии с теоремой о полной вероятности запишется

$$P(t + \tau | t) = \frac{P(t + \tau)}{P(t)}. \quad (1)$$

Предположим, что для объекта условная ВБР в течение промежутка $[t, t + \tau)$ остаётся постоянной вне зависимости от предыдущего времени безотказной работы. Т.е. можно записать $P(t + \tau | t) = P(\tau)$ и представить (1) в виде

$$P(t + \tau) = P(t)P(\tau); \tau \geq 0. \quad (2)$$

Решением (2) с учётом требований накладываемых на $P(t)$ является функция

$$P(t) = e^{-\lambda t}, t \geq 0. \quad (3)$$

Согласно (2), (3) интенсивность отказов $\lambda(t)$ есть константа.

Следовательно, на участке нормальной работы, интенсивность отказов близка к постоянной величине ВБР описывается экспоненциальным распределением.

Если условная ВБР является не возрастающей функцией от времени, то говорят, что объект стареет во времени. В этом случае интенсивность отказов $\lambda(t)$ будет являться возрастающей функцией, что соответствует третьему периоду – периоду старения. Отказы в этот период носят постепенный характер и связаны с физико-химическими процессами, происходящими в объекте и приводящими к накоплению необратимых повреждений.

Распределение времени до отказа $F(t)$ называется ВФИ (УФИ), если ему соответствует возрастающая (убывающая) по t функция интенсивности отказов.

Логарифмически-нормальное распределение

Ввиду большого теоретического и прикладного значения нормального распределения его используют и для описания несимметричных распределений вводя преобразование переменных. Так широкое распространение в теории надёжности получило логарифмически-нормальное распределение, при котором предполагается, что логарифм наработки распределён по нормальному закону. Оно применяется для описания распределения времени безотказной работы в экспериментах на усталостную долговечность материалов и в ряде других случаев.

Плотность логарифмически-нормального распределения имеет вид

$$f(t) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma t} \exp\left[-\frac{(\ln t - c)^2}{2\sigma^2}\right], & t \geq 0, \\ 0, & t \leq 0, \end{cases} \quad (16)$$

функция ВБР

$$P(t) = 0,5 - \Phi\left(\frac{\ln t - c}{\sigma}\right),$$

интенсивность отказов

$$\lambda(t) = \frac{\exp\left[-\frac{(\ln t - c)^2}{2\sigma^2}\right]}{\sqrt{2\pi} \sigma t \left[0,5 - \Phi\left(\frac{\ln t - c}{\sigma}\right)\right]},$$

здесь c и σ – параметры распределения.

Математическое ожидание и дисперсия времени безотказной работы равны

$$ET = \exp\left[c + \frac{\sigma^2}{2}\right], \quad DT = (e^{\sigma^2} - 1) \exp[2c + \sigma^2].$$

Подчеркнём, что кривые плотности логарифмически-нормального распределения асимметричны (рис. 5). Абсцисса максимума находится левее математического ожидания. Асимметрия более значительна при больших значениях параметра σ .

Для вероятностей безотказной работы $P(t) \leq 0,99$ и при коэффициенте вариации $v = \sqrt{DT} / ET \leq 0,3$ логарифмически нормальный закон можно заменить нормальным законом с параметрами $N(ET, DT)$.

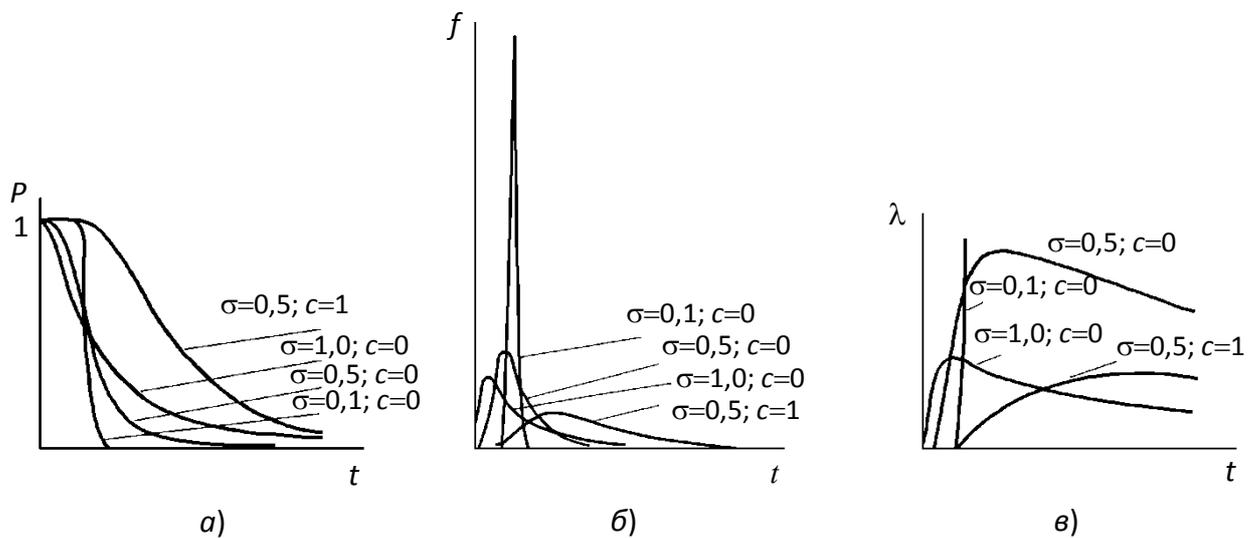


Рис. 5. Логарифмически-нормальное распределение, а – функция плотности распределения времени до отказа, б – функция ВБР, в – функция интенсивности отказов

Текст 4. Интенсивность отказов и классификация распределений

Основной характеристикой определяющей надёжность объекта является вероятность безотказной работы

$$P(t) = \mathbf{P}\{v(\tau) \in \Omega, \tau \in [0, t]\}$$

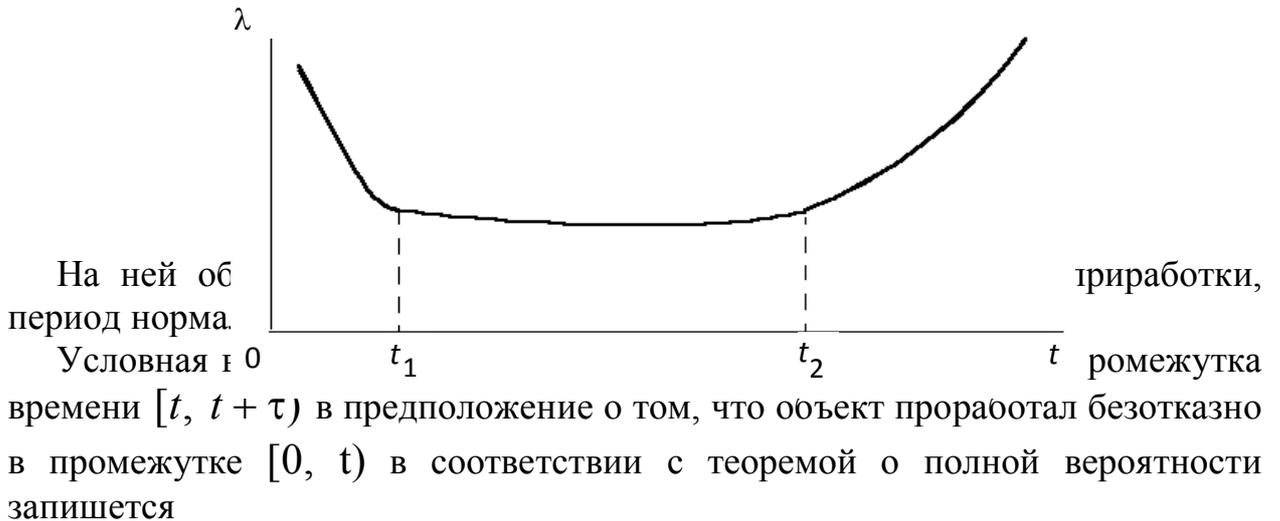
и связанная с ней величина $F(t)$ – функция распределения времени до отказа.

В теории надёжности недостаточно полно изучен вопрос об истинных законах распределения наработки объекта до отказа т.к. процесс нахождения вида распределения является весьма сложным и, в большинстве случаев, не удаётся получить точное решение.

В тоже время, исходя из различных дополнительных соображений, накопленного опыта в теории надёжности активно и успешно применяются некоторые широко распространённые виды распределений, в том числе, нормальное, экспоненциальное и т.д.

Классификацию таких распределений можно связать с широко используемой в теории надёжности характеристикой как $\lambda(t)$ – интенсивность отказов.

Типичной формой кривой, описывающей изменение указанной характеристики во времени, является «корыто»образная кривая (Рис. 1).



$$P(t + \tau | t) = \frac{P(t + \tau)}{P(t)}. \quad (1)$$

Предположим, что для объекта условная ВБР в течение промежутка $[t, t + \tau)$ остаётся постоянной вне зависимости от предыдущего времени безотказной работы. Т.е. можно записать $P(t + \tau | t) = P(\tau)$ и представить (1) в виде

$$P(t + \tau) = P(t)P(\tau); \tau \geq 0. \quad (2)$$

Решением (2) с учётом требований накладываемых на $P(t)$ является функция

$$P(t) = e^{-\lambda t}, t \geq 0. \quad (3)$$

Согласно (2), (3) интенсивность отказов $\lambda(t)$ есть константа.

Следовательно, на участке нормальной работы, интенсивность отказов близка к постоянной величине ВБР описывается экспоненциальным распределением.

Если условная ВБР является не возрастающей функцией от времени, то говорят, что объект стареет во времени. В этом случае интенсивность отказов $\lambda(t)$ будет являться возрастающей функцией, что соответствует третьему периоду – периоду старения. Отказы в этот период носят постепенный характер и связаны с физико-химическими процессами, происходящими в объекте и приводящими к накоплению необратимых повреждений.

Распределение времени до отказа $F(t)$ называется ВФИ (УФИ), если ему соответствует возрастающая (убывающая) по t функция интенсивности отказов.

Распределение Вейбулла

Распределение Вейбулла является предельным распределением минимума независимых случайных величин. Наряду с логарифмически нормальным распределением оно применяется для описания распределения наработки до отказа при усталостном разрушении, наработки до отказа шариковых подшипников, прочности сплавов на основе железа и т.п.

Плотность распределения Вейбулла имеет вид (рис. 6)

$$f(t) = \begin{cases} e^{-\mu t^\alpha} \mu \alpha t^{\alpha-1}, & t \geq 0, \\ 0 & , \quad t < 0, \end{cases} \quad (17)$$

функция *ВБР*

$$P(t) = \begin{cases} e^{-\mu t^\alpha}, & t \geq 0, \\ 0 & , \quad t < 0, \end{cases} \quad (18)$$

а интенсивность отказов определится следующим образом

$$\lambda(t) = \mu \alpha t^{\alpha-1}, \quad t > 0. \quad (19)$$

Здесь $\mu, \alpha > 0$ – параметры распределения, параметр α носит название параметра формы, а параметр μ – параметра масштаба.

При $\alpha > 1$ интенсивность отказов монотонно возрастает, а при $\alpha < 1$ монотонно убывает и не ограничена при $t = 0$.

Математическое ожидание времени до отказа

$$ET = \mu^{-\frac{1}{\alpha}} \Gamma\left(\frac{1}{\alpha} + 1\right),$$

дисперсия

$$DT = \mu^{-\frac{2}{\alpha}} \left[\Gamma\left(\frac{2}{\alpha} + 1\right) - \Gamma^2\left(\frac{1}{\alpha} + 1\right) \right].$$

В случае, когда $\mu^{-t^\alpha} \ll 1$ можно использовать вместо (18) приближенное выражение $P(t) = 1 - \lambda t^\alpha$.

Распределение Вейбулла является двухпараметрическим, что позволяет добиться хорошего соответствия с опытными данными.

Частными случаями закона Вейбулла являются экспоненциальное распределение при $\alpha = 1$ и распределение Рэлея при $\alpha = 2$.

Рассмотренные выше распределения наиболее часто применяются в теории надёжности, хотя в большинстве случаев их употребление не имеет строгого теоретического обоснования.

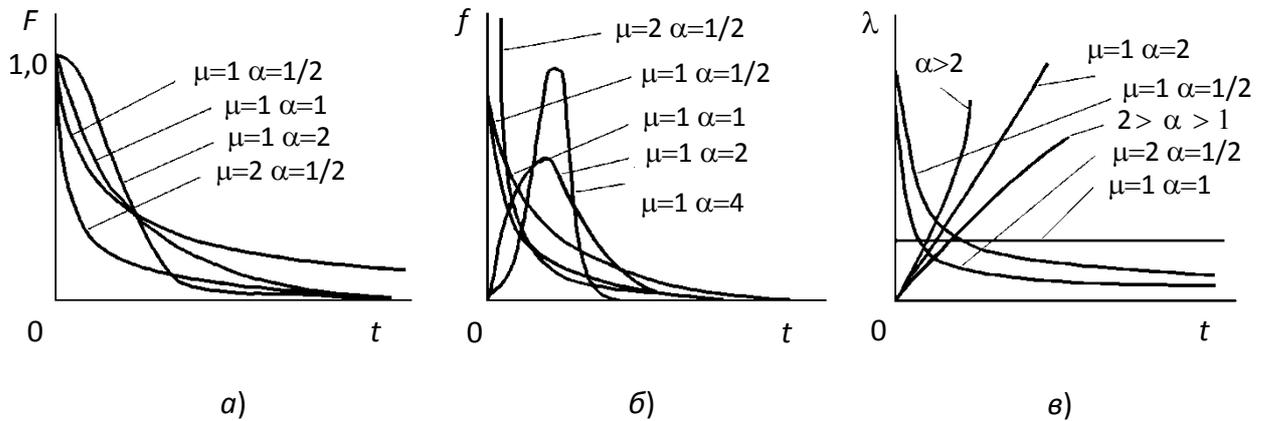


Рис. 6. Распределение Вейбулла, *a* – функция плотности распределения времени до отказа, *б* – функция ВБР, *в* – функция интенсивности отказов

Помимо указанных распределений широко применяются также равномерное и треугольное распределения, распределение Рэлея и некоторые другие. В ряде случаев, чтобы получить теоретическое распределение близкое к экспериментальному используется распределение смеси. При этом функции распределения и плотности распределения имеют вид

$$F(t) = \sum_{i=1}^k c_i F_i(t), \quad f(t) = \sum_{i=1}^k c_i f_i(t),$$

здесь $f_i(t)$, $F_i(t)$ – функции теоретических распределений заданного вида,

\tilde{c}_i весовые коэффициенты, удовлетворяющие требованию $\sum_{i=1}^k c_i = 1$.

Для обоснованного выбора того или иного закона распределения наработки до отказа необходимо использовать информацию об изменениях в объектах, ведущих к отказу. Закон распределения времени до отказа будет являться обоснованным только тогда, когда он получен в результате применения модели накопления повреждений достаточно полно описывающей реально происходящие физико-механические процессы. Только при этих условиях появляется возможность достоверного прогнозирования надёжности объекта в различных условиях эксплуатации.

РЕФЛЕКСИЯ

Задания в группы.

1. В группе изложить свой материал другим участникам группы

2. Ответить на возникающие у участников группы вопросы по своему материалу, обсудить. После обсуждения любой участник группы должен быть готов ответить на вопросы по всем частям текста.

Подготовить общий проект от группы в виде таблицы

| №№ | Распределение, краткая характеристика | Область применения | Какой механизм накопления повреждений описывает | Примечание |
|----|---------------------------------------|--------------------|---|------------|
| 1. | | | | |
| 2. | | | | |
| 3. | | | | |
| 4. | | | | |
| 5. | | | | |

3. Подготовьте презентацию по конкретному, указанному преподавателем распределению.
4. Выступите с презентацией у доски

5. Ответьте на следующие вопросы

6. Может ли использоваться экспоненциальное распределение в случае постепенных отказов?

7. Может ли использоваться распределение не экспоненциального вида в случае внезапных отказов?

8. Применимо ли нормальное распределение для описания отказов на стадии приработки?

9. Какой величиной характеризуется асимметрия распределения?

10. Как определяются математическое ожидание и дисперсия с.в. в случае распределения смеси?

2.3. Фиксация результатов группового обсуждения в таблице на доске.

5. Надёжность объектов при внезапных отказах

Занятие 7. Модель оценки вероятности безотказной работы при однократном воздействии (модель «нагрузка-прочность»).

Цель занятия: Рассмотреть модель теории надежности, в которой отсутствует временной фактор. Получить результаты в случае независимости

случайных величин, подчиняющихся нормальному распределению. Рассмотреть решение задач надёжности в случае прочностных конструкций

Необходимые пояснения

Одним из важных типов задач теории надёжности являются задачи, в которых время в явном виде не используется. При этом решается вопрос о соответствии объекта в начальном состоянии заявленным требованиям. Такой вырожденный случай описывается математической моделью, носящей в теории надёжности название «нагрузка-прочность». Различные варианты этой модели позволяют охватить достаточно широкий класс задач.

Ход занятия

ВЫЗОВ

1. Вопросы преподавателя:

На одном из прошлых занятий мы говорили о том, что временной фактор является определяющим при рассмотрении вопросов обеспечения надёжности изделия

- Как можно представить постановку задачи теории надёжности в предположении об отсутствии учёта фактора времени?
- Каков содержательный характер подобных постановок?
- Как представить графически с использованием понятий пространств нагрузок, параметров и качества данную задачу?

2. Организация работы в группах.

Задание. Обсудите в группе и внесите понятия в соответствующие столбцы:

К какому виду отказов (а возможно, и к обоим) относятся приведенные понятия:

Накопление необратимых повреждений

Учет временного фактора

Вероятностная природа внешних и внутренних факторов

Интенсивность отказов и классификация распределений

Функция распределения времени до отказа

Объект стареет во времени

Экспоненциальное распределение

Гамма-распределение

Нормальное распределение

Логарифмически-нормальное распределение

Распределение Вейбулла

Распределение Рэлея

Распределение смеси

| Внезапные отказы | Постепенные отказы |
|------------------|--------------------|
| | |

Обсуждение результатов работы групп. Фиксация преподавателем на доске.

ОСМЫСЛЕНИЕ

Чтение текста. Работа индивидуальная. При чтении текста поставить пометки + ясно, ? - требует разъяснения.

Рассмотренная постановка задачи теории надёжности для объекта является достаточно общей и позволяет использовать её в различных областях науки и техники с учётом характера внешних воздействий, физико-механических и прочих процессов, ведущих к потере работоспособности исследуемого объекта.

В теории надёжности различают такие виды объектов как элемент и система. При этом система рассматривается как упорядоченная совокупность взаимосвязанных и взаимодействующих элементов, образующих единое функциональное целое, предназначенное для выполнения заданных функций. Подходы к решению задачи надёжности для указанных видов объекта должно учитывать их специфику. Следовательно, требуется рассмотрение задач надёжности, разработка методов их решения, как для системы, так и для элемента. Очевидно также и то, что оценка надёжности системы, как правило, подразумевает установление надёжности её составляющих, т.е. элементов.

При рассмотрении понятия элемент выделяются более частные понятия - восстанавливаемые и невосстанавливаемые, ремонтируемые и неремонтируемые элементы. Для каждого вида элемента определены показатели надёжности, разработаны методы их определения.

Необходимо отметить, что для неремонтируемых элементов имеет место предельное состояние двух видов. В первом случае предельное состояние совпадает с неработоспособным состоянием, а во втором – вид предельного состояния обусловлен тем обстоятельством что, начиная с некоторого момента времени, дальнейшее применение по назначению еще

работоспособного элемента согласно используемым критериям оказывается недопустимым в связи с опасностью или вредностью этого использования. Переход неремонтируемого элемента в предельное состояние второго вида происходит раньше возникновения отказа.

Одним из наиболее значимых является случай определения показателей надёжности для элементов, эксплуатирующихся до первого отказа, т.е. элементов, для которых в рассматриваемой ситуации проведение восстановления работоспособного состояния не предусмотрено или невозможно.

В процессе эксплуатации на объект действуют многочисленные внешние и внутренние факторы, которые ведут к изменению (как правило, ухудшению) его характеристик.

Для механических систем, например, выделяют три основных вида факторов: действие энергии окружающей среды; внутренние источники энергии; потенциальная энергия, накопленная в конструкциях в процессе их изготовления (остаточные напряжения и т.п.)

Различные виды энергии вызывают в объекте процессы, связанные со сложными физико-химическими, электромагнитными и другими явлениями, приводящими к накоплению необратимых повреждений различной природы. Накопленные повреждения с течением времени ведут к ухудшению параметров, определяющих работоспособность объекта, и в конечном итоге к его отказу.

Для определения запаса надёжности объекта, его ресурса необходимо иметь численные характеристики меры повреждённости. Можно указать два основных способа оценки величины повреждённости.

При первом способе выбираются численные критерии, связанные с непосредственным измерением величины повреждения (длина макротрещины, величина пластической деформации и т.д.).

В случае, когда бывает трудно или невозможно определить непосредственно величину повреждения, рассматривают изменение величины характеристики, определяющей работоспособное состояние объекта и зависящей определённым образом от величины накопленного повреждения.

В дальнейшем все результаты формулируются для вектора качества $v(t)$, что даёт возможность при соответствующем выборе оператора H в соотношении (2.1) учитывать оба способа.

Рассмотрим некоторые модели, позволяющие определить характеристики надёжности для элементов, работающих до первого отказа.

3.1. Модель «нагрузка-прочность»

Модель «нагрузка-прочность» не предполагает учёта фактора времени. Основная задача состоит в определении вероятности того, что предельное

состояние элементом не будет достигнуто, и в сравнение найденного значения ВБР с некоторой нормативной величиной.

Предполагается, что состояние объекта в процессе эксплуатации может быть определено вектором параметров $\mathbf{a}(a_1, \dots, a_m)$, компоненты которого имеют случайный характер и совместную функцию плотности распределения $f(\mathbf{a})$.

Определим вектор качества следующим образом $v(\mathbf{a}) = R(\mathbf{a}) - S(\mathbf{a})$, тогда условие не наступления предельного состояния может быть представлено

$$v(\mathbf{a}) = R(\mathbf{a}) - S(\mathbf{a}) > 0, \quad (1)$$

здесь $S(\mathbf{a})$ – обобщенная нагрузка, действующая на объект, $R(\mathbf{a})$ – обобщенная несущая способность объекта. Все характеристики измеряются в одних и тех же единицах.

В более общем случае условие (1) может быть представлено в виде

$$v(\mathbf{a}) = c_1 R(\mathbf{a}) + c_2 S(\mathbf{a}) + c_3 > 0, \quad (2)$$

где c_1, c_2, c_3 – заданные числа.

Вероятность безотказной работы объекта определится

$$P = \int_{v(\mathbf{a}) > 0} f(\mathbf{a}) d\mathbf{a} \quad (3)$$

или с учетом зависимости между случайными величинами $S(\mathbf{a})$ и $R(\mathbf{a})$ можно записать

$$P = \int_{v(\mathbf{a}) > 0} f(R, S) dR dS,$$

где $f(R, S)$ – совместная функция плотности распределения с.в. R и S .

Модель в теории надёжности носит название «нагрузка-прочность» и допускает двоякое толкование. Во-первых, модель соответствует случаю, когда воздействие на объект является дискретным и однократным за весь период эксплуатации, во-вторых, модель позволяет определять вероятность того, что созданный объект перед началом эксплуатации удовлетворяет определённым требованиям. Таким образом, рассматривается вопрос о создании работоспособного объекта, но совершенно не затрагивается вопрос о сохранении им работоспособности в течение заданной наработки.

Отметим, что применение модели «нагрузка-прочность» требует не только определения функции плотности распределения $f(R, S)$, но и нахождения решения детерминированной задачи о состоянии объекта для всей области изменения параметров a_1, \dots, a_m .

Рассмотрим частный случай, когда величины $S(\mathbf{a})$ и $R(\mathbf{a})$ являются независимыми с.в. с функциями плотности распределения, соответственно, $\varphi_1(S)$ и $\varphi_2(R)$. В этом случае будем иметь

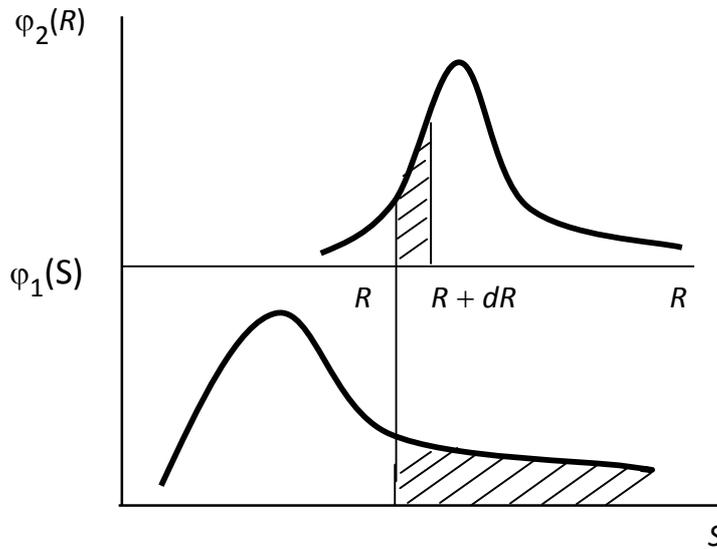


Рис. 1. Модель «нагрузка-прочность»

Выберем некоторый уровень обобщённой нагрузки равный R . Вероятность того, что наблюдаемое значение величины обобщённой прочности R принадлежит интервалу $(R, R + dR)$ равна $dP_1 = \varphi_2(R)dR$, а вероятность того, что величина действительного нагружения (рис. 1) превысит величину R равна

$$f(R, S) = \varphi_1(S) \cdot \varphi_2(R)$$

$$P_2(R) = \mathbf{P}\{x > R\} = \int_R^{\infty} \varphi_1(x) dx$$

Вероятность одновременного наступления двух событий $R \in (R, R + dR)$ и $S > R$ равна

$$dP = P_2 dP_1.$$

Таким образом, вероятность отказа Q , т.е. выполнения условия (1), определится следующим образом

$$Q = \int P_2 dP_1 = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_2(R) \left[\int_R^{\infty} \varphi_1(x) dx \right] dR,$$

а вероятность безотказной работы

$$P = 1 - Q = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_2(R) \left[\int_{-\infty}^R \varphi_1(x) dx \right] dR. \quad (5)$$

Нахождение вида функций плотности распределения $\varphi_1(S)$ и $\varphi_2(R)$ представляет сложную задачу.

Рассмотрим хорошо изученный случай, когда с.в. R и S являются независимыми с.в. и подчиняются нормальным распределениям с

параметрами $N(\bar{R}, \sigma_R^2)$ и $N(\bar{S}, \sigma_S^2)$. Согласно условия (1) отказ не произойдет, если выполняется требование

$$v = R - S > 0.$$

Очевидно, что с.в. v также будет подчиняться нормальному закону распределения $N(\bar{v}, \sigma_v^2)$, где $\bar{v} = \bar{R} - \bar{S}$, $\sigma_v^2 = \sigma_R^2 + \sigma_S^2$.

Используя соотношения (4), (5) получим для ВБР

$$P = 0,5 + \Phi\left(\frac{\bar{R} - \bar{S}}{\sqrt{\sigma_R^2 + \sigma_S^2}}\right), \quad (6)$$

а для величины вероятности отказа

$$Q = 0,5 - \Phi\left(\frac{\bar{R} - \bar{S}}{\sqrt{\sigma_R^2 + \sigma_S^2}}\right),$$

здесь $\Phi(\cdot)$ нормированная функция Гаусса $\Phi = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^z \exp\left(-\frac{u^2}{2}\right) du$.

В более общем случае, когда условие не наступления предельного состояния имеет вид (2) можно доказать следующую теорему.

Теорема.

Пусть имеются независимые с.в. $R \sim N(\bar{R}, \sigma_R^2)$, $S \sim N(\bar{S}, \sigma_S^2)$, тогда вероятность выполнения неравенства (3.1) определяется выражением

$$\mathbf{P}\{c_1 R + c_2 S + c_3 > 0\} = 0,5 + \Phi\left(\frac{c_1 \bar{R} + c_2 \bar{S} + c_3}{\sqrt{c_1^2 \sigma_R^2 + c_2^2 \sigma_S^2}}\right). \quad (7)$$

Доказательство.

Так как R, S нормально распределённые с.в., то их линейная комбинация $v = c_1 R + c_2 S + c_3$ также является с.в. с нормальным законом распределения $N(c_1 \bar{R} + c_2 \bar{S} + c_3, c_1^2 \sigma_R^2 + c_2^2 \sigma_S^2)$, для которой справедливо $\mathbf{P}\{c_1 R + c_2 S + c_3 > 0\} = \mathbf{P}\{v > 0\}$. Отсюда следует соотношение (7).

Применение данного результата при решении задач теории надёжности расширяет возможности формулировки условия отказ, а, следовательно, и самой модели.

Модель «нагрузка-прочность» позволяет не только сделать вывод о том, что спроектированный объект удовлетворяет или не удовлетворяет требования по ВБР, но и решить задачу о подборе характеристик объекта (геометрические размеры, параметры материалов и др.), обеспечивающих выполнения требования по ВБР.

Действительно, задавая величину требуемой ВБР P_* , из соотношения (6) определим соответствующее значение квантиля

$$\gamma_* = -\frac{\bar{R} - \bar{S}}{\sqrt{\sigma_R^2 + \sigma_S^2}}. \quad (8)$$

Данное соотношение с учётом того, что величины $\bar{R}, \bar{S}, \sigma_R^2, \sigma_S^2$ зависят от искомых характеристик объекта, определяемых вектором $\mathbf{a}(a_1, \dots, a_m)$, является уравнением для их нахождения.

РЕФЛЕКСИЯ

Задание 1.

1. Обсудите материал, вызвавший затруднения. Обсудите в группе, какие допущения сделаны в модели «нагрузка – прочность».
2. Сформулируйте основные условия применения данной модели.
3. Вернемся к таблице на доске, при необходимости исправим. Обсуждение.

Вопросы

1. Как формулируется понятие независимых случайных величин?
2. Как определяются значения математического ожидания и дисперсии с.в. при нелинейном (линейном) преобразовании функциональном преобразовании с.в.?
3. Является ли решение задачи об определении параметров из соотношения (8) единственным?

Задание 2.

Работа в группах.

Используя соотношение (8) дать решение предложенной преподавателем задачи, включая:

- Записать постановку задачи надёжности
- Определить операторы
- Найти численное значение искомой величины

Варианты задач:

1. Рассчитать на прочность элемент конструкции (стержень), на который действует растягивающая нагрузка Q , являющаяся с.в. Предел прочности R материала, из которого изготовлен элемент, также является с.в.

С.в. Q и R описываются нормальным законом распределения с параметрами соответственно $N(1780 \text{ Н}, (445 \text{ Н})^2)$, $N(690 \text{ МПа}, (34,5 \text{ МПа})^2)$. Требуемая ВБР элемента равна $P_* = 0,9999$. Определить площадь стержня.

2. Рассчитать на прочность элемент конструкции (стержень круглого сечения), на который действует крутящий момент M , являющийся с.в. Расчетное сопротивление сдвигу R также является с.в. С.в. M и R описываются нормальным законом распределения с параметрами соответственно $N(29 \text{ кН} \cdot \text{м}, (1,5 \text{ кН} \cdot \text{м})^2)$, $N(60 \text{ МПа}, (3 \text{ МПа})^2)$. Требуемая ВБР элемента равна $P_* = 0,999$. Определить радиус стержня.

3. Рассчитать на жёсткость элемент конструкций (стержень круглого сечения), на который действует крутящий момент M , являющийся с.в. Допускаемый относительный угол закручивания θ является с.в. С.в. M и θ описываются нормальным законом распределения с параметрами соответственно $N(40 \text{ кН} \cdot \text{м}, (3 \text{ кН} \cdot \text{м})^2)$, $N(60 \text{ град/м}, (0,01 \text{ град/м})^2)$. Требуемая ВБР элемента равна $P_* = 0,9999$. Определить радиус стержня.

4. Балка на двух опорах прямоугольного сечения высотой $h = 16 \text{ см}$, шириной $b = 8 \text{ см}$ посередине пролета длиной $l = 80 \text{ см}$ нагружена силой Q , являющейся с.в. Предел прочности R материала, из которого изготовлена балка также является с.в. С.в. Q и R описываются нормальным законом распределения с параметрами, соответственно, $N(20 \text{ кН}, (2 \text{ кН})^2)$, $N(350 \text{ МПа}, (27 \text{ МПа})^2)$. Определить ВБР балки из условия прочности по нормальным напряжениям.

Занятие 8. Экспоненциальная модель внезапных отказов

Цели занятия: Объяснить применимость экспоненциальной модели для описания внезапных отказов, связать с зависимостью величины интенсивности отказов от времени. Дать математическое обоснование экспоненциальной модели, обосновать область корректного применения модели.

Необходимые пояснения. Одним из важнейших случаев решения задачи об определении вероятности безотказной работы объекта является случай связанный с внезапными отказами. Данный вариант является отражением ситуации возникающей на практике при эксплуатации объектов в период, когда на их работоспособные свойства влияние деградации характеристик не велико. Наиболее часто используемой моделью является модель, основанная на экспоненциальном распределении. Что объясняется как её математическими свойствами, так и хорошим соответствием при описании реальных задач.

ВЫЗОВ

1. Вопросы преподавателя:

- Приведите примеры внезапных отказов объектов различной структуры
- Обоснуйте Ваше утверждение о внезапном характере отказа в приведённом примере
- Сформулируйте математические свойства экспоненциальной функции

Задание.

Вам в группы предлагается 6 утверждений. У каждого утверждения поставьте значок «+» - согласен, «-» - не согласен, «?» - сомневаюсь.

Утверждения «ложно - верно»

- 1) В процессе эксплуатации у большинства объектов, как правило, наблюдается период, в течение которого интенсивность отказов $\lambda(t)$ практически постоянна или является медленно возрастающей функцией.
- 2) Экспоненциальный закон обладает важным свойством, которое в терминах теории надежности может быть сформулировано в следующем виде: вероятность безотказной работы объекта в интервале $(t, t + \tau)$ в случае экспоненциального закона не зависит от времени предшествующей работы $(t, t + \tau)$, а зависит только от длины интервала τ .
- 3) Условие $\lambda = const$ соответствует случаю, когда время предшествующей работы объекта не влияет на ВБР в данный момент времени.
- 4) Быстрый рост величины $\lambda(t)$ указывает на то, что преобладающими становятся постепенные отказы.

5) Экспоненциальный закон применяется только в случае внезапных отказов.

6) В экспоненциальной модели вся информация о внешней среде заключена в интегральном параметре $\lambda(t)$.

Фиксация результатов группового обсуждения в таблице на доске.

| Группа/Утверждение | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|--------------------|---|---|---|---|---|---|
| 1 | + | ? | ? | ? | + | + |
| 2 | - | + | + | - | + | - |
| 3 | ? | - | - | - | + | ? |
| 4 | | | | | | |
| 5 | | | | | | |
| 6 | | | | | | |

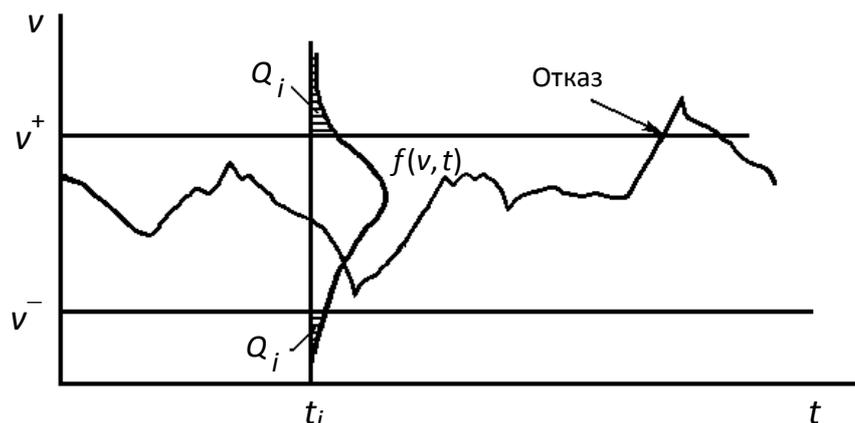
ОСМЫСЛЕНИЕ

Чтение текста. Работа индивидуальная. При чтении текста поставить пометки + ясно, ? - требует разъяснения.

Модель внезапных отказов

В период нормальной эксплуатации (участок 2 на «корыто»образной кривой) процессы накопления необратимых повреждений еще мало влияют на работоспособное состояние объекта, и его надёжность определяется в основном внезапными отказами. Эти отказы не связаны с изменением характеристик, определяющих работоспособное состояние объекта, а вызываются неблагоприятным сочетанием внешних и внутренних факторов, превышающих способность объекта к их восприятию. Поэтому в данном случае необходимо оценить обстановку, которая может привести к отказу и вероятность этого события. Оценка обстановки связана с анализом эксплуатационных режимов, возможностью возникновения экстремальных нагрузок и влияния окружающей среды.

В качестве характеристики, позволяющей оценить обстановку, используется интенсивность отказов $\lambda(t)$ – величина вероятности возникновения отказа в единицу времени при условии, что до данного момента времени отказ не возник. Если предположить, что вектор качества $\mathbf{v}(t)$ может выйти за пределы допускаемой области, то вероятность этого выхода и будет определять вероятность отказа. На рис. 1 показан случай, когда вектор качества является скалярной величиной, а допускаемая область имеет верхнюю и нижнюю границы.



Вероятность отказа для фиксированного момента времени t_i равна

$$Q_i = 1 - \int_{v^-}^{v^+} f(v, t_i) dv, \quad (1)$$

где $f(v, t_i)$ – плотность распределения вектора качества для момента t_i и характеризует в данном случае разброс характеристик качества объекта из-за случайного характера режимов и условий эксплуатации.

Величина Q_i характеризует долю объектов, работоспособных в момент времени t_i , в то время как ВБР $P(t_i)$ характеризует способность объектов к безотказной работе в течение заданного периода $[0, t_i)$.

Экспоненциальная модель внезапных отказов

Возникновение внезапных отказов не связано с изменением параметров, определяющих работоспособное состояние объекта, и временем его предыдущей работы, а зависит от внешних условий, которые можно оценить с помощью характеристики $\lambda(t)$ – интенсивности отказов

В процессе эксплуатации у большинства объектов, как правило, наблюдается период, в течение которого интенсивность отказов $\lambda(t)$ практически постоянна или является медленно возрастающей функцией. На участке нормальной работы достаточно обоснованной аппроксимацией закона изменения $\lambda(t)$ может служить предположение $\lambda(t) \approx const$, которое соответствует гипотезе о том, что вероятность возникновения отказа характеризуется стационарностью т.е. внешняя ситуация не меняется во

времени. В таком случае из зависимости $P(t) = \exp\left[-\int_0^t \lambda(\tau) d\tau\right]$ следует, что

ВБР объекта описывается экспоненциальным законом

$$P(t) = \exp(-\lambda t). \quad (2)$$

Функция плотности распределения времени до первого отказа имеет вид $f(t) = \lambda e^{-\lambda t}$, математическое ожидание времени до отказа равно λ^{-1} , а дисперсия – λ^{-2} .

С учётом сказанного соотношение (2) можно переписать в виде

$$P(t) = \exp(-t/\bar{T}), \quad (3)$$

где величина математического ожидания $\bar{T} = \mathbf{E}T = \lambda^{-1}$ – в теории надёжности определяется как средняя наработка до отказа.

Экспоненциальный закон обладает важным свойством, которое в терминах теории надёжности может быть сформулировано в следующем виде: вероятность безотказной работы объекта на интервале $(t, t + \tau)$ в случае экспоненциального закона не зависит от времени предшествующей работы $(t, t + \tau)$, а зависит только от длины интервала τ .

Данное свойство является характеристическим, т.е. если оно имеет место для какой-либо функции ВБР $P(t)$, то эта функция будет экспоненциальной.

При высоких уровнях ВБР, что соответствует условиям $\lambda t \ll 0,1$ или $t \ll \bar{T}$ можно использовать следующую аппроксимацию

$$P(t) = \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i (\lambda t)^i \cdot \frac{1}{i!} \approx 1 - \lambda t, \quad (4)$$

Ошибка аппроксимации не превосходит величины $\frac{1}{2} \left(\frac{t}{\bar{T}} \right)^2$.

Приближённая формула (4) даёт оценку ВБР с запасом, т.к. для любого t справедливо неравенство $P(t) \geq 1 - \frac{t}{\bar{T}}$. Это следует из выпуклости функции e^{-x} : действительно касательная к ней $y_1 = 1 - x$ лежит ниже самой функции $y_2 = e^{-x}$, т.е. $y_1 \leq y_2$, $1 - x \leq e^{-x}$.

Значения $P(t)$ в зависимости от величины λt приведены в табл. 1

Таблица 1

Значения функции ВБР

| | | | | | |
|-------------|-------|-----|------|-------|--------|
| λt | 1 | 0,1 | 0,01 | 0,001 | 0,0001 |
| $P(t)$ | 0,368 | 0,9 | 0,99 | 0,999 | 0,9999 |

Из данных табл. 1 можно сделать вывод о том, что для обеспечения значений ВБР $P(t) > 0,9$ необходимо, чтобы объект эксплуатировался только в течение срока службы составляющего лишь незначительную часть средней наработки до отказа \bar{T} .

Экспоненциальный закон вследствие простоты математического описания находит широкое применение при решении различных задач теории надёжности. Вместе с тем условие $\lambda = const$ соответствует случаю, когда время предшествующей работы объекта не влияет на ВБР в данный момент времени. Данное обстоятельство характерно только для внезапных отказов и поэтому применение экспоненциального закона в случае постепенных отказов требует дополнительного анализа.

Рассмотрим условия корректного применения экспоненциального закона в случае постепенного отказа.

Для третьего участка кривой, описывающей закономерность изменения величины интенсивности отказов, наблюдается быстрый рост величины $\lambda(t)$. Данное обстоятельство указывает на то, что преобладающими становятся постепенные отказы.

Назовём элемент стареющим, если функция интенсивности отказов является монотонно возрастающей, т.е. $\lambda(t_2) \geq \lambda(t_1)$ для $t_2 > t_1$.

Введём обозначение $\Lambda(t) = \int_0^t \lambda(\tau) d\tau$. Очевидно, что функция $\Lambda(t)$ выпукла вниз. ВБР согласно табл. 1.1 определится в виде $P(t) = \exp[-\Lambda(t)]$, а среднее время до отказа будет равно

$$\bar{T} = \int_0^{\infty} e^{-\Lambda(\tau)} d\tau = \int_0^{\infty} e^{-x} d\varphi(x) = \int_0^{\infty} \varphi(x) e^{-x} dx, \quad (5)$$

где $\varphi(x)$ – функция обратная к функции $\lambda(t)$.

Функция $\varphi(x)$ выпукла вверх, поэтому её значения лежат ниже значений касательной. При любом x имеем $\varphi(x) \leq \varphi(1) + \varphi'(1)(x-1)$. Отсюда можно

получить $\bar{T} < \varphi(1) \int_0^{\infty} e^{-x} dx + \varphi'(1) \int_0^{\infty} (x-1) e^{-x} dx = \varphi(1)$, что эквивалентно

неравенству $\lambda(\bar{T}) < 1$. Функция $\lambda(t)$ выпукла вниз и её значения на

интервале $(0, \bar{T})$ лежат ниже значений хорды $\lambda(t) < \frac{\lambda(\bar{T})}{\bar{T}} t < \frac{t}{\bar{T}}$. Отсюда

следует, что $P(t) > \exp(-t/\bar{T})$ для $t < \bar{T}$.

Из последнего неравенства можно сделать следующий вывод: если для оценки ВБР стареющего объекта используется экспоненциальный закон с параметром $\lambda = \bar{T}^{-1}$, определяемым согласно (5), то тем самым занижается значение ВБР для всех моментов $t < \bar{T}$.

При высоких требованиях к безотказности объекта время его непрерывной эксплуатации T_p ограничивается некоторым допустимым

значением ВБР P_* т.е. имеем $P(T_p) \geq P_*$. Для высоконадёжных объектов ($P_* > 0,999$ и выше) на интервале $(0, T_p)$ законы распределения, описывающие функцию ВБР, теряют индивидуальность и приобретают черты, характерные для редких событий. Можно показать, что «хвосты» различных законов распределения в указанной области дают с достаточной для практики точностью одинаковый результат. Поэтому можно считать допустимым и обоснованным применение экспоненциального закона для оценки ВБР объектов с высокими требованиями к надёжности, как при внезапных, так и при постепенных отказах.

В экспоненциальной модели вся информация о внешней среде заключена в интегральном параметре λ . Дадим трактовку данной модели.

Рассмотрим объект, который может находиться только в двух состояниях: работоспособном и неработоспособном. В процессе эксплуатации он подвергается внешнему воздействию R . Если величина воздействия ниже некоторого критического уровня, то объект остаётся работоспособным, а если выше – то происходит отказ и объект переходит в неработоспособное состояние. Предполагается, что перед началом эксплуатации объект находился в работоспособном состоянии.

Предположение о дискретном характере времени достаточно хорошо соответствует реальности, например, взлёт и посадка летательного аппарата, количество оборотов вала и т.п. вследствие чего будем считать, что время является дискретной величиной $i = 1, 2, \dots$.

Обозначим вероятность того, что величина внешнего воздействия R ниже критического уровня через p , соответственно q – вероятность того, что величина внешнего воздействия выше критического уровня. Очевидно $p + q = 1$. Принимаем, что до момента первого выхода величины внешнего воздействия за критический уровень реализуется последовательность независимых испытаний – схема Бернулли.

Определим вероятность того, что объект откажет при k -м воздействии. Для того чтобы объект отказал при k -м воздействии, необходимо и достаточно, чтобы первый раз за время эксплуатации объекта величина внешнего воздействия превысила критический уровень. Обозначим через A_i событие « i -е воздействие не превысило критический уровень», а через B_i – « i -е воздействие превысило критический уровень». Очевидно, что $\mathbf{P}\{A_i\} + \mathbf{P}\{B_i\} = 1$.

Считаем, что результат i -го воздействия не зависит от результатов всех предыдущих воздействий, т.е. события A_i и B_i при различных i являются взаимно независимыми.

Обозначим через D_k событие «превышение критического уровня впервые произошло при k -м воздействии». Очевидно, что оно наступит в том и только

том случае, когда величина $(\bar{k}1)$ воздействия была ниже критического уровня, а k -го выше. Данное условие запишется в следующем виде

$$D_k = B_k \prod_{i=1}^{k-1} A_i. \text{ Используя теорему умножения для независимых событий,}$$

будем иметь $\mathbf{P}\{D_k\} = \mathbf{P}\{B_k\} \prod_{i=1}^{k-1} \mathbf{P}\{A_i\}$. В силу исходных предположений

$$\mathbf{P}\{A_i\} = p_i, \quad \mathbf{P}\{B_i\} = q_i = 1 - p_i \quad \text{и, следовательно, можно записать}$$

$$\mathbf{P}\{D_k\} = q_k \prod_{i=1}^{k-1} (1 - q_i).$$

Введём предположение о том, что вероятность q_i - превышения критического уровня внешним воздействием остаётся постоянной при всех воздействиях. Тогда при $q_i = q, i = 1, 2, \dots$ получим $\mathbf{P}\{D_k\} = (1 - q)^{k-1} q$.

Обозначим через τ случайную величину равную числу воздействий, при которых объект оставался работоспособным. Следующее соотношение выражает вероятность того, что с.в. $\tau = k - 1$

$$\mathbf{P}\{\tau = k - 1\} = (1 - q)^{k-1} q, \quad k \geq 1.$$

Таким образом, с.в. τ подчиняется геометрическому распределению.

Подчеркнём, что с.в. τ есть не что иное, как время безотказной работы, выраженное числом воздействий на объект.

Найдём вероятность того, что в течение первых K воздействий не произойдёт отказа объекта, т.е. определим вероятность события $\tau > K$. Очевидно, $\mathbf{P}\{\tau > K\} + \mathbf{P}\{\tau \leq K\} = 1$. Вероятность $\mathbf{P}\{\tau \leq K\}$ можно вычислить, используя теорему сложения вероятностей

$$\mathbf{P}\{\tau \leq K\} = \sum_{i=0}^K \mathbf{P}\{\tau = i\}.$$

Отсюда получим
$$\mathbf{P}\{\tau \leq K\} = q \sum_{i=0}^K (1 - q)^i = 1 - (1 - q)^{K+1}.$$

Следовательно, вероятность безотказной работы в течение времени K равна

$$\mathbf{P}\{\tau > K\} = (1 - q)^{K+1}.$$

Данная формула может быть представлена в приближенном виде

$$\mathbf{P}\{\tau > K\} = (1 - q)^{K+1} \approx e^{-Kq}.$$

Здесь погрешность от замены величины $(1 - q)^n$ на величину e^{-nq} имеет порядок $nq^2/2$. Приближённая формула даёт хорошее совпадение с точной, если величина q мала и $Kq \in [0, 1 - 20]$.

Математическое ожидание времени безотказной работы равно

$$\bar{\tau} = \mathbf{E}\tau = \sum_{i=1}^{\infty} (i-1) \mathbf{P}\{\tau = i-1\} = \frac{1-q}{q}.$$

Для малых значений q можно принять $\mathbf{E}\tau \approx q^{-1}$ и приближённая формула запишется

$$\mathbf{P}\{\tau > K\} = \exp\left\{-\frac{K}{\mathbf{E}\tau}\right\} = \exp\left\{-\frac{K}{\bar{\tau}}\right\}. \quad (6)$$

В большинстве случаев время рассматривается как непрерывная величина. В этом случае аналогом геометрического распределения для непрерывного времени безотказной работы является экспоненциальное распределение, а

аналог соотношения (6) определяется формулой $\mathbf{P}\{\tau > t\} = e^{-\lambda t} = e^{-\frac{t}{T}}$

РЕФЛЕКСИЯ

2. Обсуждение итогов чтения материала, разбор и пояснение положений, вызвавших непонимание
3. Возврат к таблице, обсуждение в группе, исправление результатов – при необходимости с презентацией у доски. В любом случае – общее обсуждение полученных результатов.
3. Вопросы
 - Объясните отличие вероятности отказа в данный момент от вероятности отказа за данный промежуток времени?
 - Возможно ли применение экспоненциального закона для случая постепенных отказов?
 - В чём смысл понятия «схема испытаний Бернулли»?

4. Работа в группах.

Решить задачи (2-3):

Варианты задач:

1. Интенсивность отказов объекта постоянна и равна $0,82 \cdot 10^{-3}$ час⁻¹. Требуется найти ВБР в течение 6 час, частоту отказов при $t = 100$ час и среднюю наработку до первого отказа.
2. Вероятность безотказной работы автоматической линии в течение 120 час равна 0,9. В предположении о справедливости экспоненциального закона определить интенсивность и частоту отказов для $t = 120$ час.

3. Средняя наработка до первого отказа автоматической системы управления равна 640 час. В предположении о справедливости экспоненциального закона определить ВБР и частоту отказов для $t = 120$ час, а также интенсивность отказов.

4. Время работы изделия до отказа описывается усеченным нормальным законом с параметрами $N(8000 \text{ час}, (1000 \text{ час})^2)$. Требуется найти ВБР изделия для $t = 8000$ час, частоту отказов для $t = 6000$ час, интенсивность отказов для $t = 10^4$ час, среднюю наработку до первого отказа.

5. Время работы изделия до первого отказа описывается законом Релея с параметром $\sigma = 1860$ час. Требуется найти ВБР изделия, частоту отказов и интенсивность отказов для $t = 1000$ час, среднюю наработку до первого отказа.

Фиксация результатов решения задач в таблице на доске.

Предложить самостоятельно сформулировать несколько задач, отличающихся от решенных по заданию. Обсуждение предложенных постановок.

Занятие 9. Прогнозирование вероятности безотказной работы в случае, когда внешнее воздействие задаётся потоком независимых дискретных воздействий.

Цели занятия. Рассмотреть постановку задачи определения ВБР объекта в случае описания вектора качества потоком дискретных статистически независимых значений. Определить понятие потока. Дать приближённое решение сформулированной задачи, отметить особенности приближённого решения.

Вводная беседа. Экспоненциальная модель является наиболее распространённой, но не единственной моделью, применяемой для описания внезапных отказов, т.е. отказов не связанных с деградацией свойств объектов. Модель, которую мы будем разбирать сегодня, имеет более строгую структуру и требует наличия дополнительной информации по сравнению с экспоненциальной моделью

ВЫЗОВ

1. Вопросы преподавателя:

- Каковы характерные черты внезапного отказа?
- В чем принципиальное отличие от постепенного отказа?
- Правильно ли утверждение, что экспоненциальный закон применим только при внезапных отказах?
- Какие дополнительные условия необходимо учитывать при для корректного применения экспоненциального закона в случае постепенного отказа?
- Когда мы можем сказать, анализируя кривую интенсивности отказов, что преобладающими становятся постепенные отказы?

Работа в группах.

Вам необходимо:

1. Сформулировать, что такое вектор качества.
 2. Какая связь существует между векторами состояния и качества?
 3. Вам в группы дан рисунок (рис.1). Как вы проинтерпретируете этот рисунок?
 - Предложите модель внезапного отказа объекта, отличающуюся от экспоненциальной, обоснуйте применимость модели.
3. Фиксация результатов группового обсуждения в таблице на доске.

ОСМЫСЛЕНИЕ

Чтение текста. Работа индивидуальная. При чтении текста поставить пометки + ясно, ? - требует разъяснения.

Надёжность объекта при дискретных потоках случайных воздействий

Определение вероятности безотказной работы объекта в период внезапных отказов требует нахождения вероятности случайного события, состоящего в том, что на временном отрезке $[0, t]$ не произойдет ни одного

выброса вектора качества за пределы области допустимых состояний в пространстве качества

$$P(t) = \mathbf{P}\{\sup v(\tau) < v_*, \tau \in [0, t]\}. \quad (1)$$

Распространенной математической моделью случайного процесса, описывающего изменение вектора качества во времени, является поток дискретных статистически независимых значений вектора качества $v(t) = \{v_1, v_2, \dots\}$ (рис. 1), где $v_i = v(t_i)$.

Свойства потока задаются функцией распределения $F(v)$ величины вектора качества и функцией распределения интервала времени между соседними значениями $\Phi(t)$, с функциями плотности распределения соответственно $f(v)$ и $\phi(t)$.

Таким образом, определение ВБР объекта (1) требует нахождения распределения абсолютного максимума дискретного потока $v(t)$ и вероятности не превышения процессом $v(t)$ уровня v_* .

С этой целью рассмотрим задачу о нахождении распределения абсолютного максимума дискретного потока $X(t)$ с функцией распределения $F(x)$.

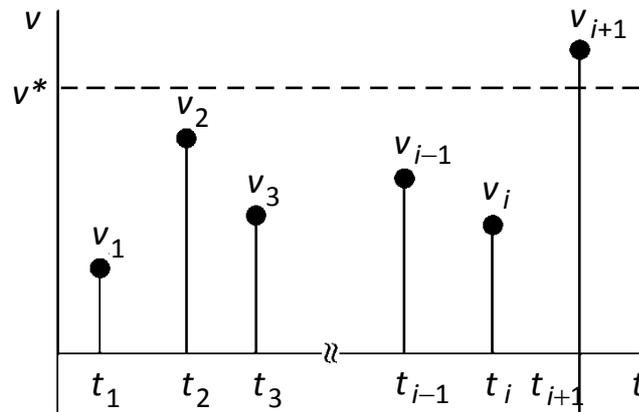


Рис. 1. Дискретный поток вектора качества

В каждой реализации потока можно выделить его наибольшее значение, которое будем определять как абсолютный максимум. Очевидно, что величина этого максимума зависит от длительности реализации. Вероятностные свойства с.в. абсолютного максимума описываются функцией распределения, которую обозначим через $F_*(x, t)$.

Пусть на отрезке $[0, t]$ находится n значений дискретного потока $X(t)$. Тогда распределение абсолютного максимума потока совпадает с распределением наибольшего значения с.в. X при n сериях ее наблюдения по n наблюдений в каждой серии. Условная функция распределения

абсолютного максимума (при условии, что число значений потока в каждой реализации равно n) согласно теореме умножения вероятностей определится

$$F_*(x|t) = \{F(x)\}^n. \quad (2)$$

Число значений потока n за некоторое фиксированное время t является с.в. Поэтому функция распределения абсолютного максимума запишется в виде

$$F_*(x, t) = \sum_{k=0}^{\infty} \{F(x)\}^k P(k, t),$$

где $P(k, t)$ – вероятность события, при котором за время t реализуется ровно k значений потока.

Нахождение величины $P(k, t)$ представляет собой достаточно сложную задачу, решенную только для некоторых видов распределений.

Например, если $\Phi(t) = 1 - \exp(-\rho t)$, $F(x) = 1 - \exp(-\lambda x)$, то в случае больших x будем иметь

$$F_*(x, t) = 1 - \rho t \exp(-\lambda x). \quad (3)$$

Приведём приближённое решение задачи о распределении абсолютного максимума.

Вероятность превышения значениями потока $X(t)$ некоторого уровня x за время t равна сумме вероятностей превышения этого уровня один, два и более раз т.е.

$$P(x, t) = \sum_{i=1}^{\infty} P_i(x, t),$$

где $P_i(x, t)$ – вероятность того, что уровень x за время t будет превышен i раз.

Среднее число превышений этого уровня равно

$$\bar{n}(x, t) = \sum_{i=1}^{\infty} iP_i(x, t).$$

Находя разность этих двух соотношений, получим

$$\bar{n}(x, t) - P(x, t) = \sum_{i=2}^{\infty} (i-1)P_i(x, t).$$

Т.к. в правой части соотношения под знаком суммы стоит неотрицательная величина, то будет справедливо неравенство $P(x, t) \leq \bar{n}(x, t)$. Следовательно, математическое ожидание числа превышений уровня x на отрезке $[0, t]$ даёт для вероятности $P(x, t)$ оценку сверху.

Для высоконадёжных объектов выходы за пределы допустимой области являются редким событием и математическое ожидание числа пересечений

уровня x будет мало по сравнению с единицей $\bar{n}(x,t) \ll 1$. При этом условия вероятностями двух, трех и более кратного пересечения уровня можно пренебречь по сравнению с вероятностью однократного пересечения. В этом случае будем иметь

$$P(x,t) = \begin{cases} 1, & \text{при } x < x_0(t) \\ \bar{n}(x,t), & \text{при } x \geq x_0(t) \end{cases}, \quad (4)$$

где $x_0(t)$ – корень уравнения $\bar{n}(x,t) = 1$.

Таким образом, с учётом введённого предположения выражение для функции распределения абсолютного максимума (3) запишется в следующем виде

$$F_*(x,t) = \begin{cases} 0, & \text{при } x < x_0(t) \\ 1 - \bar{n}(x,t), & \text{при } x \geq x_0(t) \end{cases}.$$

Для рассматриваемого потока средняя частота превышений уменьшается при увеличении уровня в соответствии с функцией распределения величины значений потока. Вследствие чего выражение для функции распределения абсолютного максимума можно переписать

$$F_*(x,t) = \begin{cases} 0, & \text{при } x < x_0(t) \\ 1 - \frac{t}{\bar{t}} [1 - F(x)], & \text{при } x \geq x_0(t), \end{cases} \quad (5)$$

где \bar{t} – средний интервал времени между соседними значениями потока, определяемый через функцию распределения $\Phi(t)$.

Другая возможность получения приближённого решения заключается в замене случайной величины n в формуле (2) на её среднее значение $\bar{n}(t)$. Асимптотическая оценка $\bar{n}(t)$ при $t \rightarrow \infty$ имеет вид

$$\bar{n}(t) = t/\bar{t} + 0,5 \bar{t}^2 / t^2 \approx t/\bar{t}.$$

Используя полученные результаты ВБР за время t может быть определена согласно формулы (4), в которой вместо произвольного уровня x следует подставить заданную величину v_* .

При стационарных потоках приближенная оценка для ВБР запишется

$$P(t) = \begin{cases} 1 - \frac{t}{\bar{t}} [1 - F(v_*)], & \text{при } t \in [0, t_*], \\ 0, & \text{при } t > t_*, \end{cases} \quad (6)$$

здесь t_* – корень уравнения $t[1 - F(v_*)] = \bar{t}$.

Функция распределения времени, соответствующего моменту первого достижения процессом $v(t)$ уровня v_* имеет вид

$$F(t) = \begin{cases} 1, & \text{при } t > t_*, \\ \frac{t}{t_*} [1 - F(v_*)], & \text{при } t \in [0, t_*]. \end{cases} \quad (7)$$

На рис. 2 показан качественный вид функций ВБР $P(t)$ и интенсивности отказов $\lambda(t)$.

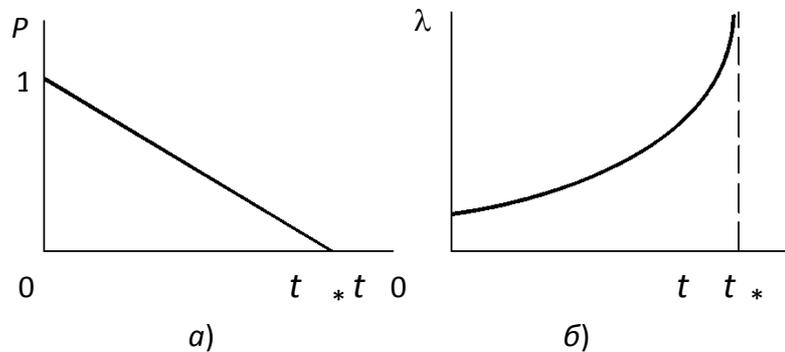


Рис. 2. Функции ВБР (а), интенсивности отказов (б)

РЕФЛЕКСИЯ

1. Обсуждение итогов чтения материала, разбор и пояснение положений, вызвавших непонимание

2. Работа в группах. Вопросы:

- Определите понятие «абсолютный максимум».
- Сформулируйте принципиальные отличия рассмотренной модели от экспоненциальной модели
- Где в конечном результате учитываются свойства дискретного процесса?
- Как соотносятся результаты по оценке ВБР по экспоненциальной модели и по предложенной?
- Вследствие чего ВБР определена только на конечном временном интервале?

3. Фиксация результатов группового обсуждения в таблице на доске.

Занятие 10. Надёжность объекта при случайных воздействиях, описываемых непрерывным случайным процессом

Цели занятия. Рассмотреть постановку задачи определения ВБР объекта в случае описания вектора качества стационарным случайным процессом. Определить понятие случайного процесса, его основные характеристики. Дать приближённое решение задачи.

Необходимые пояснения. Рассмотренная модель в большей степени учитывает взаимодействие объекта с внешней средой, но, естественно, возможно дальнейшая детализация данного механизма. Например, изменение модели внешнего воздействия.

Ход занятия

ВЫЗОВ

1. Вопросы преподавателя:

- Как можно описать случайный процесс, для которого значения и аргумент являются непрерывными величинами?
- Какие варианты случайных процессов можно сформулировать предполагая, что значение процесса и его аргумент могут принимать дискретные и непрерывные значения

2. Организация групп. В группе 4 – 5 человек.

Задание в группы:

Сформулируйте модель внезапного отказа объекта, с непрерывным аргументом (временем).

3. Фиксация результатов группового обсуждения на доске.

ОСМЫСЛЕНИЕ

Чтение текста. Работа индивидуальная. При чтении текста поставить пометки + ясно, ? - требует разъяснения.

Надёжность объекта при случайных воздействиях, описываемых непрерывным случайным процессом

Рассмотрим задачу о нахождении ВБР объекта в случае внезапного отказа при условии, что изменение вектора качества описывается непрерывным случайным процессом $v(t)$.

Пусть $v(t)$ - непрерывный и дифференцируемый случайный процесс с заданной совместной плотностью вероятности $f(v, \dot{v}, t)$ самого процесса $v(t)$ и его производной по времени $\dot{v}(t)$.

Подсчитаем математическое ожидание числа пересечений процессом $v(t)$ заданного уровня v_* . Необходимо различать пересечения, для которых $\dot{v} > 0$ и для которых $\dot{v} < 0$. Первый тип пересечения будем называть положительным, а второй – отрицательным (рис. 1).

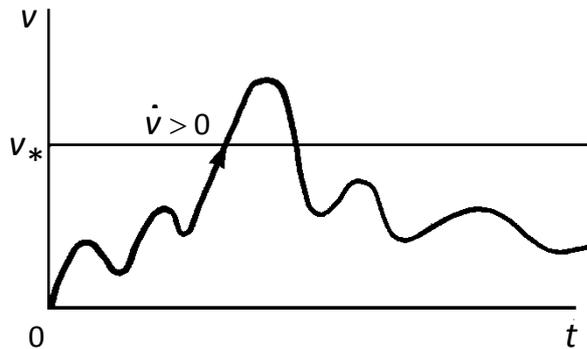


Рис. 1. Положительное пересечение непрерывным процессом $v(t)$ заданного уровня

Математическое ожидание числа положительных пересечений уровня v_* в единицу времени обозначим через ν_+ , а отрицательных – через $\nu_-(v_*, t)$.

Учитывая, что число пересечений на неперекрывающихся промежутках времени обладает свойством аддитивности можно записать

$$N_+(v_*, \tau \in [0, t]) = \int_0^t \nu_+(v_*, \tau) d\tau. \quad (1)$$

Аналогичную формулу имеем для отрицательных пересечений.

В случае стационарного процесса $v(t)$ будут иметь место $\nu_+(v_*) = \nu_-(v_*)$, $N_+(v_*, \tau \in [0, t]) = \nu_+(v_*)t$. Подобные соотношения справедливы для отрицательных пересечений.

В предположении о высокой надёжности объекта можно получить

$$\nu_+(v_*, t) = \int_0^\infty f(v_*, \dot{x}, t) \dot{x} d\dot{x}.$$

Проводя рассуждения аналогичные изложенным в предыдущем параграфе можно показать, что справедливо следующее равенство

$$N_+(v_*, \tau \in [0, t]) - Q(t) = \sum_{i=2}^{\infty} (i-1) Q_i(v_*, \tau \in [0, t]),$$

где $Q(t)$ – вероятность отказа объекта, $Q_i(v_*, \tau \in [0, t])$ – вероятность случайного события, состоящего в том, что на интервале $[0, t]$ произойдёт ровно i положительных пересечений уровня v_* .

Отсюда можно получить для величины $Q(t)$ следующую оценку сверху $Q(t) \leq N_+(v_*, \tau \in [0, t])$.

Определим для высоконадёжных объектов, т.е. для объектов, когда выход на границу допустимой области является весьма редким событием, приближённую формулу для ВБР. В этом случае математическое ожидание от числа положительных пересечений будет весьма мало по сравнению с единицей, т.е. $N_+(v_*, \tau \in [0, t]) \ll 1$ и в предположении о том, что вероятности многократных выбросов $Q_{i \geq 2}(v_*, \tau \in [0, t])$ пренебрежимо малы по сравнению вероятностью однократного выброса $Q_1(v_*, \tau \in [0, t])$ будем иметь

$$P(t) \approx 1 - N_+(v_*, \tau \in [0, t]) = 1 - \int_0^t v_+(v_*, \tau) d\tau. \quad (2)$$

Определяя из дополнительных соображений свойства величины $v_+(v_*, t)$ с учетом (2) можно найти функцию ВБР $P(t)$ в конкретном случае.

Например, используем распределение Пуассона для нахождения приближенного выражения для ВБР. Пусть на временном отрезке $[0, t]$ имеет место наступление некоторых случайных событий. Обозначим через k – число событий за указанный отрезок, a – математическое ожидание этого числа. Предполагая, что с.в. k подчиняется закону Пуассона получим, что вероятность наступления k событий на промежутке $[0, t]$ равна

$$P_k = \frac{a^k}{k!} e^{-a}, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (3)$$

События, описываемые с помощью данной схемы, называются пуассоновскими потоками событий.

Рассматривая положительное пересечение процессом $v(t)$ уровня v_* как событие в пуассоновском потоке, определим ВБР $P(t)$ как вероятность того, что на отрезке $[0, t]$ не произойдет ни одного события. Тогда выражение ВБР согласно формулы (3) при $k = 0$ примет вид $P_0 = e^{-a}$. Математическое ожидание a согласно (1) будет, следовательно, математическим ожиданием

числа положительных пересечений $N_+(v_*, [0, t])$ т.е. $a = \int_0^t v_+(v_*, \tau) d\tau$.

Таким образом, приближенная формула для ВБР примет вид

$$P(t) \approx \exp\left[-\int_0^t v_+(v_*, \tau) d\tau\right]. \quad (4)$$

Сравнивая полученное выражение (4) с формулой $P(t) = \exp\left[-\int_0^t \lambda(\tau) d\tau\right]$

получим $\lambda(t) = \nu_+(v_*, t)$.

Таким образом, в данной модели интенсивность отказов отождествляется с математическим ожиданием числа положительных пересечений уровня v_* в единицу времени.

В случае стационарного процесса $\nu(t)$ будем иметь $\nu_+(v_*) = \text{const}$ и, следовательно, приходим к экспоненциальному закону для ВБР

$$P(t) \approx \exp[-\nu_+(v_*)t].$$

Математические модели внезапных отказов, имеющие в своей основе предположения об ординарности потока и на редком их появлении, принято называть моделями пуассоновского типа.

РЕФЛЕКСИЯ

1. Обсуждение итогов чтения материала, разбор и пояснение положений, вызвавших непонимание

2. Работа в группах. Вопросы:

- Определите понятие «абсолютный максимум».
- Сформулируйте принципиальные отличия рассмотренной модели от экспоненциальной модели
- Где в конечном результате учитываются свойства непрерывного случайного процесса?
- Как соотносятся результаты по оценке ВБР по экспоненциальной модели и по предложенной?

3. Задание.

В виде таблицы или любого другого графического организатора представьте сравнительный анализ изученных моделей внезапных отказов. Должны быть отражены основные допущения, математические формулы, выводы о плюсах и минусах предлагаемой модели.

4. Фиксация результатов группового обсуждения в таблице на доске.

6. Надёжность объектов при постепенных отказах

Занятие 11. Нахождение вероятности безотказной работы объекта в случае линейного закона накопления повреждений

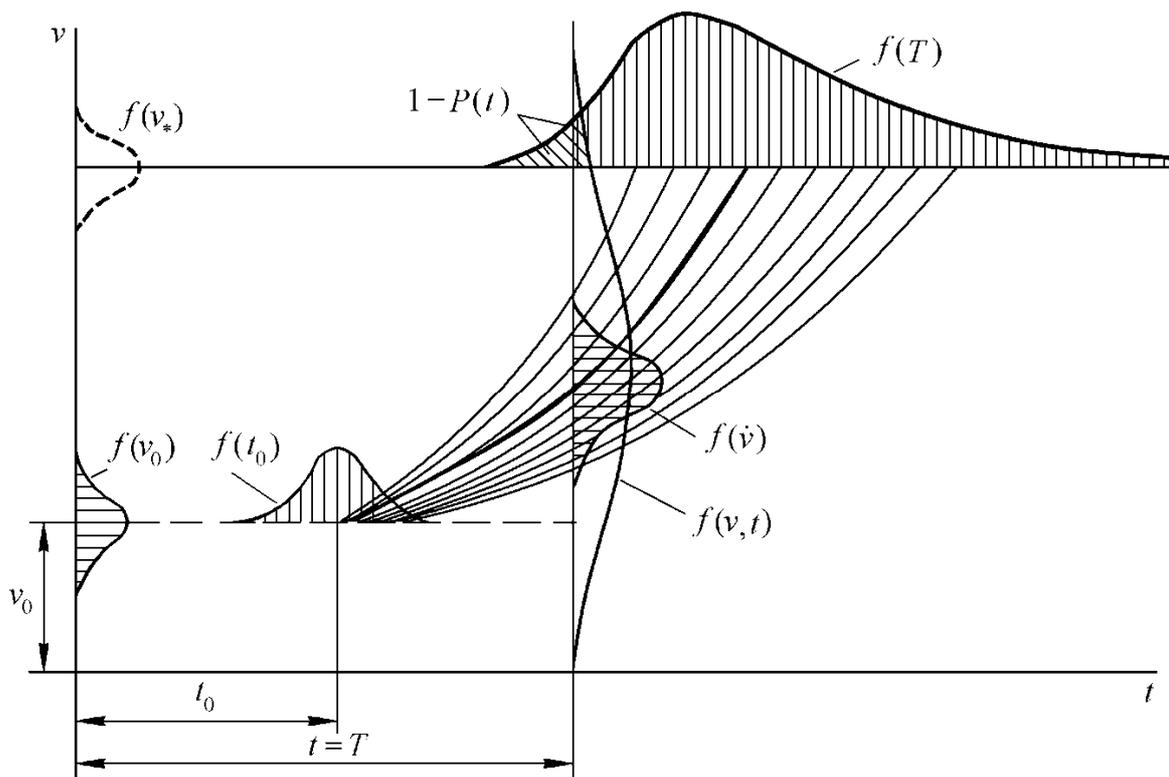
Цели занятия: Рассмотреть схему возникновения отказа на участке износных отказов. Подчеркнуть важность линейного закона, возможность его широкого применения.

Вводная беседа. Изучена тема внезапных отказов, приступаем к изучению темы «Постепенные отказы». Важно подчеркнуть определяющую роль износных отказов, обратить внимание на возможности использования линейного закона для описания изменения вектора качества.

Ход занятия

ВЫЗОВ 1.

Задание в группы. Вам в группы представлен рисунок со схемой формирования постепенного отказа. Проинтерпретируйте схему. В таблицу внесите все обозначения на схеме, напишите, что они означают.



| Обозначение | Интерпретация |
|-------------|---------------|
| | |
| | |
| | |
| | |
| | |
| | |

ОСМЫСЛЕНИЕ 1.

Чтение текста

Модель износовых (постепенных) отказов

Постепенные отказы возникают в результате происходящих в объекте процессов накопления необратимых повреждений, ведущих к ухудшению параметров, определяющих его работоспособность. При этом, чем дольше срок эксплуатации объекта, тем выше вероятность возникновения отказа.

Рассмотрим возможную схему формирования постепенного отказа объекта (рис. 1). Работоспособное состояние объекта определяется одномерным вектором качества $v(t)$, а отказ возникает при достижении им предельного значения v_* .

На схеме показаны основные факторы, влияющие на формирование закона распределения времени до отказа. Предполагается, что начальное значение вектора качества $v_0 = v(0)$ является с.в. с функцией распределения $f(v_0)$. Данное предположение позволяет учитывать разброс начальных характеристик объекта. Возможно, что регистрируемый процесс изменения вектора качества может начаться только через некоторый промежуток времени t_0 , который тоже является с.в. Отметим, что и величина v_* может, в общем случае, быть с.в.

Процесс изменения вектора качества $v(t)$ является случайным процессом. Выход его на верхнюю границу допустимой области соответствует отказу объекта и определяет функцию плотности распределения времени до отказа $f(t)$, которая позволяет найти основную характеристику – ВБР $P(t)$. Функция плотности распределения $f(v, t)$ дает распределение вектора качества в некоторый текущий момент времени. Рассмотренная схема описывает основные черты, определяющие процесс возникновения постепенного отказа.

Анализ схемы указывает на необходимость изучения закономерностей изменения вектора качества, процессов накопления необратимых повреждений с течением времени.

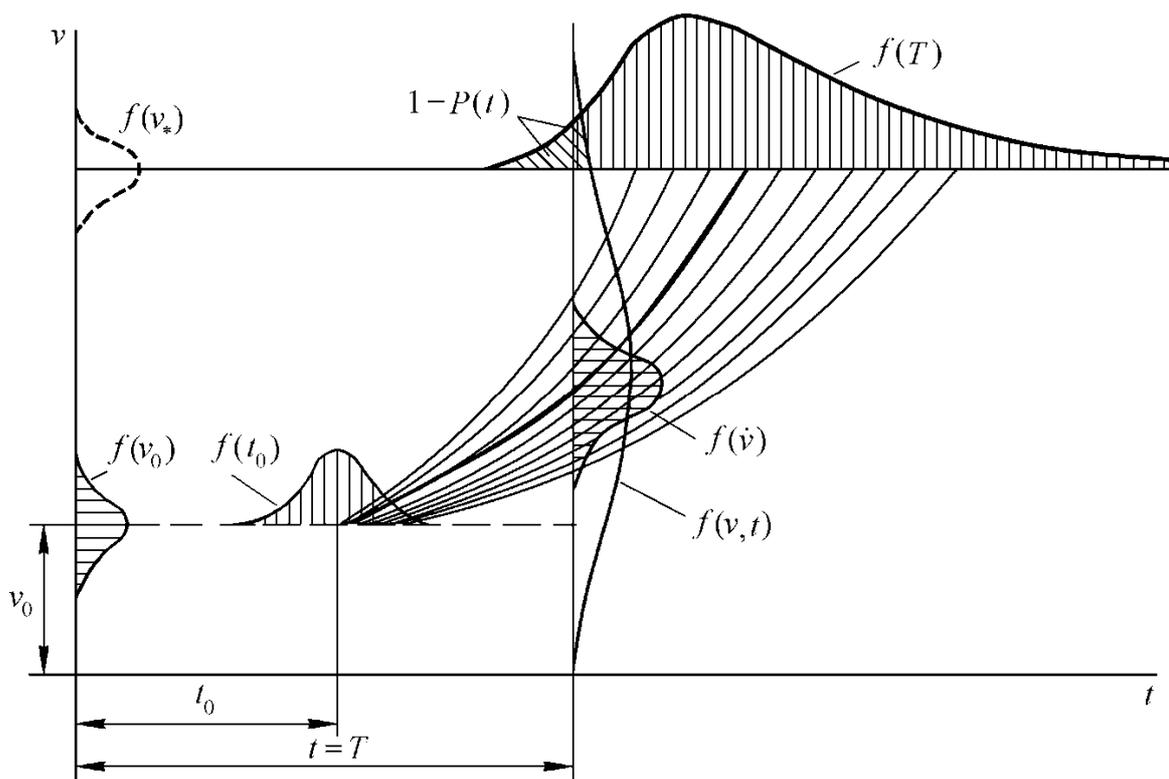


Рис. 1 Схема формирования постепенного отказа

Рефлексия 1.

Проверьте правильность своего понимания схемы. Внесите необходимые дополнения, исправления.

Фронтальное обсуждение схемы.

ВЫЗОВ 2 .

Вопросы преподавателя

1. Чем объясняется возможность использования линейного закона?
2. Могут ли реализации случайного процесса носить линейный характер?

ОСМЫСЛЕНИЕ 2.

Чтение текста. Работа индивидуальная.

Задание. Отмечайте значком «?» те выкладки, которые для вас неочевидны.

Все математические формулы фиксируйте в тетради.

Вероятность безотказной работы объекта при постоянной скорости изменения вектора качества

Линейные случайные процессы, являются удобной моделью для приближённого описания многих процессов накопления повреждений, изменения вектора качества. Эти процессы достаточно точно описывают

основные закономерности реальных процессов, требуют небольшого количества экспериментальных данных для определения характеристик, дают возможность исследовать надёжность объектов и дать прогноз ресурса.

Рассмотрим модель формирования постепенного отказа объекта для случая, когда скорость изменения вектора качества постоянна. Уравнение накопления повреждений представим в следующем виде

$$\frac{dv}{dt} = \gamma, \quad (1)$$

с начальным условием – $v(0) = v_0$.

В дальнейшем будем считать, что величины γ, v_0 являются независимыми с.в. с функциями плотности распределения $f(\gamma), f(v_0)$ соответственно.

Условие отказа представим в виде $v(t) = v_*$, область Ω изменения вектора качества – $v(t) \in [v_0, v_*)$. Тогда ВБР определится следующим образом

$$P(t) = \mathbf{P}\{v_0 \leq v(\tau) < v_*, \tau \in [0, t)\}.$$

Решим задачу по определению ВБР в предположении о том, что v_0 - детерминированная величина, причём $v_0 = 0$, а с.в. γ описывается нормальным законом $N(\bar{\gamma}, \sigma_\gamma^2)$.

Решением уравнения (1) является линейная функция $v = \gamma t$. Время до отказа T является с.в. и определяется из условия отказа

$$v_* = \gamma t.$$

Задача определения функции распределения с.в. T заключается в отыскании функции плотности распределения $f(t)$ по заданной функции плотности распределения $f(\gamma)$.

Известно, что если имеется непрерывная с.в. X с плотностью распределения $f(x)$ и связанная с ней функциональной зависимостью $Y = \varphi(X)$ с.в. Y , то функция плотности распределения с.в. Y имеет вид

$$g(y) = f(\psi(y))\psi'(y),$$

где ψ – функция, обратная функции φ .

Для нашего случая функция φ определяется решением уравнения (1) и равна $t = \frac{v_*}{\gamma}$. Функция плотности распределения времени до отказа будет иметь выражение

$$f(t) = \frac{\bar{T}}{\delta\sqrt{2\pi}} \frac{1}{t^2} \exp\left[-\frac{(\bar{T} - t)^2}{2\delta^2 t^2}\right], \quad (2)$$

где $\delta = \sigma_\gamma / \bar{\gamma}$ – коэффициент вариации с.в. γ , $\bar{T} = v_* / \bar{\gamma}$.

Выражение для ВБР запишется

$$P(t) = 0,5 + \Phi\left(\frac{v_* - \bar{\gamma}t}{t\sigma_\gamma}\right), \quad (3)$$

здесь $\Phi(\cdot)$ - нормированная функция Гаусса.

Анализ функции плотности распределения $f(t)$, представленной формулой (2), показывает, что эта функция определена на интервале $(0, \infty)$ и ассиметрична. Абсцисса её максимума находится левее точки с координатой $t = \bar{T}$ и равна

$$T_{\text{мод.}} = \frac{\sqrt{1 - 8\delta^2} - 1}{4\delta^2} \cdot \bar{T}.$$

Графики функций $f(\tau)$, $P(\tau)$, $\tau = t/\bar{T}$ приведены на рис. 2.

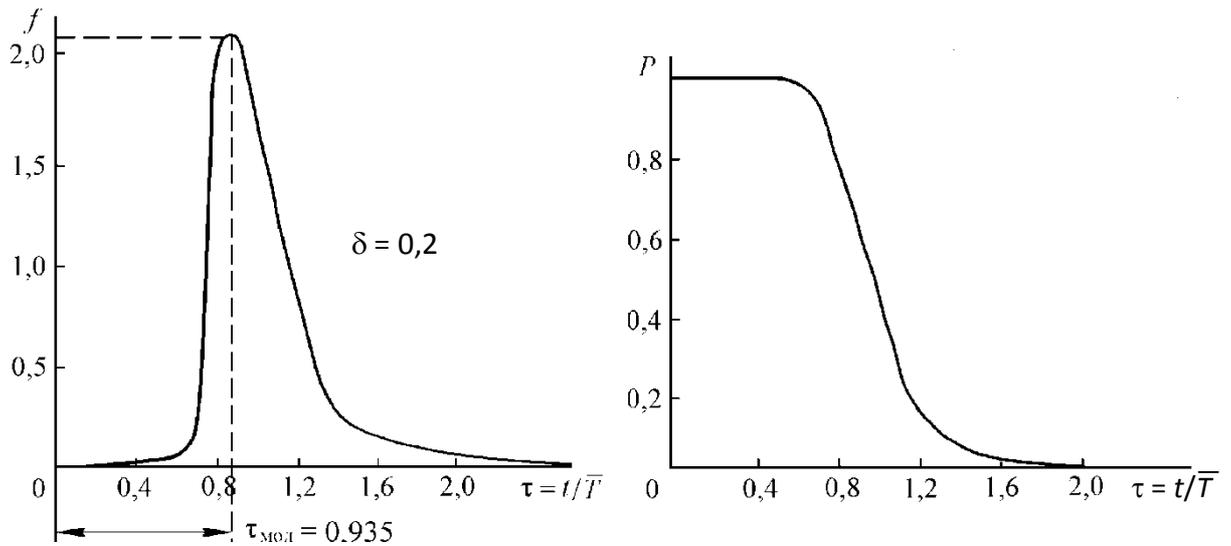


Рис. 2. Функция плотности распределения времени до отказа (а), функция ВБР (б)

Из соотношений (2), (3) следует, что интенсивность отказов $\lambda(t)$ является возрастающей функцией.

Рассмотрим данную задачу в предположении о том, что начальное значение вектора качества $v(0) = v_0$, а с.в. скорости γ подчиняется нормальному закону с параметрами $N(\bar{\gamma}, \sigma_\gamma^2)$ и ограничена нижним γ_1 и верхним γ_2 пределами. В этом случае, для описания с.в. γ необходимо применять усечённое нормальное распределение с функцией плотности распределения

$$f_1(\gamma) = cf(\gamma),$$

здесь функция $f(\gamma)$ является функцией плотности распределения нормальной с.в. $\gamma - N(\bar{\gamma}, \sigma_\gamma^2)$, а коэффициент c – нормирующим множителем равным $c = \frac{1}{\Phi(u_2) - \Phi(u_1)}$, где $u_1 = \frac{\gamma_1 - \bar{\gamma}}{\sigma_\gamma}$, $u_2 = \frac{\gamma_2 - \bar{\gamma}}{\sigma_\gamma}$.

Функция плотности распределения времени до отказа T примет вид

$$f(t) = \frac{|v_* - v_0| c}{\sigma_\gamma t^2 \sqrt{2\pi}} \exp \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{|v_* - v_0|}{\sigma_\gamma t} - \frac{\bar{\gamma}}{\sigma_\gamma} \right)^2 \right],$$

причём $t \in [t_1, t_2]$, $t_1 = \frac{|v_* - v_0|}{\gamma_2}$, $t_2 = \frac{|v_* - v_0|}{\gamma_1}$.

Более полная схема потери работоспособности объекта может учитывать случайный характер начального значения вектора качества v_0 . В этом случае решение уравнения (1) запишется в следующем виде

$$v = v_0 + \gamma t,$$

где v_0 и γ – независимые с.в. с заданными законами распределения.

Срок службы до отказа T является функцией от двух независимых случайных аргументов v_0 и γ . Для отыскания закона распределения с.в. T , а, следовательно, и ВБР объекта необходимо использовать известные методы, аналогичные изложенным выше.

Для случая, когда с.в. v_0, γ являются с.в. с нормальными распределениями $N(\bar{v}_0, \sigma_{v_0}^2)$ и $N(\bar{\gamma}, \sigma_\gamma^2)$, соответственно, будем иметь

$$P(t) = 0,5 + \Phi \left[\frac{v_* - v_0 - \bar{\gamma}t}{\sqrt{\sigma_{v_0}^2 + \sigma_\gamma^2 t^2}} \right]. \quad (4)$$

Полученные результаты достаточно просто обобщаются на случай, когда допустимая область изменения вектора качества имеет верхний и нижний предел.

Условия отказа в этом случае примут вид $v(t) = v_{\max}$ для верхней границы и $v(t) = v_{\min}$ для нижней границы, а ВБР определится следующим образом

$$P(t) = \mathbf{P}\{v_{\min} < v(\tau) < v_{\max}, \tau \in [0, t]\}.$$

Функция ВБР будет равна

$$P(t) = \Phi \left[\frac{v_{\max} - v_0 - \bar{\gamma}t}{\sqrt{\sigma_{v_0}^2 + \sigma_\gamma^2 t^2}} \right] + \Phi \left[\frac{v_0 + \bar{\gamma}t - v_{\min}}{\sqrt{\sigma_{v_0}^2 + \sigma_\gamma^2 t^2}} \right].$$

Представление (4) можно применять и в случае нелинейного характера процесса изменения вектора качества. При этом нестационарность случайного процесса $v(t)$ будет определяться зависимостью величин $\bar{\gamma}, \sigma_{\gamma}^2$ от времени. В таком случае имеем

$$E v(t) = \bar{v} = \bar{v}_0 + \bar{\gamma}(t)t,$$

$$D v(t) = \sigma_v^2 = \sigma_{v_0}^2 + (t\sigma_{\gamma}(t))^2.$$

Функция ВБР объекта определится следующим образом

$$P(T) = 0,5 + \Phi \left[\frac{v_* - \bar{v}(t)}{\sigma_v(t)} \right]. \quad (5).$$

Для описания существенно нелинейных процессов изменения вектора качества может использоваться кусочно-линейная аппроксимация. Такие кусочно-линейные случайные функции имеют вид

$$v(t) = v_0 + \sum_i \gamma_i \tau_i,$$

где v_0 начальное значение, γ_i скорость изменения вектора качества на i -ом участке линеаризации, τ_i время, отсчитываемое от начала i -го участка линеаризации. Величины v_0, γ_i являются с. в.

РЕФЛЕКСИЯ

Задание в группы.

1. Задайте в группе вопросы, которые возникли у вас при чтении текста. Если не удалось ответить на них, сформулируйте и задайте эти вопросы в аудитории.

Фронтальное обсуждение.

2. В разделе представлены две модели линейных случайных процессов. Сравните их.

| | Модель 1 | Модель 2 |
|--------------------|----------|----------|
| Начальные условия | | |
| Допущения | | |
| Ключевые формулы и | | |

| | | |
|---|--|--|
| их интерпретация | | |
| Выводы и комментарии по применимости моделей на практике. Примеры | | |

Фронтальное обсуждение результатов.

3. Представьте графическую интерпретацию схемы формирования износостойкого отказа в двух случаях: начальное значение есть детерминированная величина и начальное значение есть с..в. с заданным законом. Оформите ее на листах А3. При подготовке презентации дайте ответы на вопросы: В формуле (4) ВБР описывается нормальным законом? В формуле (5) ВБР описывается нормальным законом?

4. Презентация у доски.

Занятие 12. Прогнозирование времени достижения предельного состояния объекта при использовании некоторых частных видов уравнения накопления повреждений

Цели занятия. Показать возможности применения асимптотических методов для определения вероятности безотказной работы изделия при кумулятивном характере накопления повреждений. Рассмотреть некоторые частные случаи уравнений.

Вводная беседа. Решение задачи о нахождении ВБР представляется весьма сложной математической задачей, требующей привлечения аппарата теории случайных процессов. Одним из возможных подходов, позволяющим решать данные задачи, является асимптотический подход.

ВЫЗОВ

1. Вопросы преподавателя.

- Какая идея заложена в основу асимптотического подхода?
- Является ли асимптотическое решение точным?
- Что такое предельные теоремы в теории вероятностей?
- Какие характеристики требуются для полного описания случайного процесса?

ОСМЫСЛЕНИЕ

Чтение текста. Работа индивидуальная.

Асимптотические методы

Задачи по определению ВБР и других характеристик объектов в случае постепенных отказов, как правило, связаны со сложными и трудоёмкими математическими исследованиями. Однако в ряде случаев можно выделить такие параметры задачи, при стремлении которых к некоторому предельному значению результат решения задачи принимает достаточно простой аналитический вид.

Асимптотические решения дают возможность установить те члены решения, которые являются основными и выявляют действительную общую закономерность, которую и следует учитывать при рассмотрении прикладных задач.

Рассмотрим применение асимптотических подходов к решению задачи нахождения ВБР объектов с учётом процессов накопления повреждений, влияющих на работоспособное состояние, т.е. для случая постепенных отказов.

Получим результаты в случае различного вида правой части уравнения накопления повреждений.

Случай 1

Рассмотрим частный случай уравнения накопления повреждений, определяющего изменение вектора качества $v(t)$:

$$\frac{dv}{dt} = f[q(t)]. \quad (1)$$

Пусть $q(t)$ хорошо перемешанный случайный процесс, кроме того свойства $q(t)$ и $f(\cdot)$ таковы, что при любых конечных значениях t первые и вторые моменты процесса $q(t)$ конечны, а при $t \rightarrow \infty$ первые и вторые

моменты величины $v(t) = \int_0^t f[q(\tau)]d\tau$ стремятся к бесконечности.

Тогда значения случайного процесса $v(t)$ распределены по закону, который при $t \rightarrow \infty$ асимптотически приближается к нормальному распределению с математическим ожиданием

$$\varphi(t) = \mathbf{E}\psi(t) = \int_0^t \mathbf{E}\{f[q(\tau)]\}d\tau \quad (2)$$

и корреляционной функцией

$$K_v(t_1, t_2) = \int_0^{t_1} \int_0^{t_2} K_f(\tau_1, \tau_2)d\tau_2d\tau_1, \quad (3)$$

где $K_f(t_1, t_2)$ – корреляционная функция для правой части уравнения (1).

Данный результат следует из центральной предельной теоремы для интегралов от случайных процессов.

Для функции плотности вероятности процесса $v(t)$ будем иметь следующее асимптотическое представление

$$f(v, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma_v(t)} \exp\left\{-\frac{[v - \varphi(t)]^2}{2\sigma_v^2(t)}\right\}, \quad (4)$$

где $\sigma_v^2(t) \equiv K_v(t, t)$.

Функция распределения времени до отказа определится как

$$F_T(t) = 1 - \int_0^1 f(v, t)dv = 1 - \Phi[[1 - \varphi(t)]/\sigma_v(t)], \quad (5)$$

причём здесь принято, что $v \in [0, 1)$, а условие отказа имеет вид $v(t) = v_* = 1$.

Важным случаем, находящим широкое применение в приложениях, является случай, когда процесс $q(t)$ является стационарным и эргодическим с одномерной функцией распределения $p(q)$.

При этом предположении будем иметь из (2) $\varphi(t) = \mu t$, где $\mu = \int f(q)p(q)dq$. Из (3) можно получить при $t = t_1 = t_2$

$$\sigma_v^2 = 2 \int_0^t (t - \tau) K_f(\tau) d\tau. \quad (6)$$

При достаточно больших значениях $t \gg \tau_c$, где τ_c — время корреляции процесса $q(t)$, можно принять $K_f(\tau) = 0$, вследствие чего выражение (6) запишется в виде

$$\sigma_v^2 = 2t \int_0^\infty K_f(\tau) d\tau = vt.$$

Таким образом, для данного случая получим следующее асимптотическое представление функции плотности распределения вектора качества

$$p(v, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi vt}} \exp\left[-\frac{(v - \mu t)^2}{2vt}\right], \quad (7)$$

функции распределения времени до отказа (5)

$$F_T(t) = 1 - \Phi[(1 - \mu t)(vt)^{-1/2}], \quad (8)$$

функции плотности распределения времени до отказа

$$p_T(t) = \frac{1 + \mu t}{(8\pi vt^3)^{1/2}} \exp\left[-\frac{(1 - \mu t)^2}{2vt}\right].$$

Вид функции $p_T(t)$ при различных соотношениях v, μ показан на рис. 1.

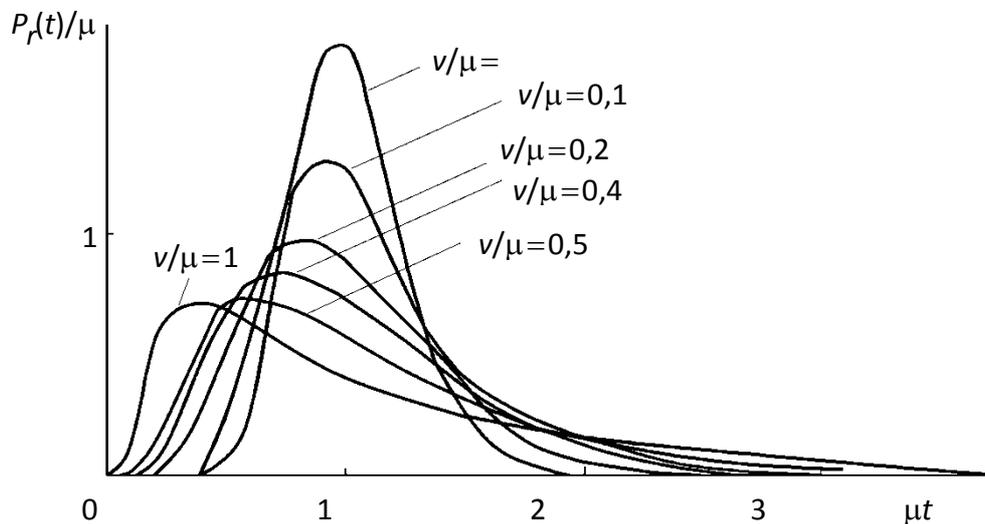


Рис. 1. Функция плотности распределения времени до отказа

Случай 2

В более общем виде уравнение накопления повреждений можно представить

$$\frac{dv}{dt} = f_1(v)f_2[q(t)], \quad (9)$$

причём будем предполагать, что выполняется условие нормирования

$$\int_0^1 \frac{dv}{f_1(v)} = 1.$$

В этом случае имеем следующее асимптотическое представление для функции плотности распределения вектора качества

$$p(v,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\tilde{\sigma}_v(t)}} \frac{dU(v)}{dv} \exp\left\{-\frac{[U(v) - \tilde{\varphi}(t)]^2}{2\tilde{\sigma}_v^2(t)}\right\}, \quad (10)$$

здесь

$$\tilde{\sigma}_v^2(t) = K_{\tilde{v}}(t,t), \quad U(v) = \int_0^v \frac{dx}{f_1(x)},$$

$$\tilde{v}(t) = \int_0^t f_2[q(\tau)]d\tau, \quad \tilde{\varphi}(t) = \mathbf{E}[\tilde{v}(t)].$$

Функция распределения вектора качества примет вид

$$F_v(v,t) = \Phi\left\{\frac{U(v) - \tilde{\varphi}(t)}{\tilde{\sigma}_v(t)}\right\}.$$

Для стационарного процесса $q(t)$ будем иметь

$$p(v,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi vt}} \frac{dU(v)}{dv} \exp\left\{-\frac{[U(v) - \mu t]^2}{2vt}\right\}. \quad (11)$$

Если $v \in [0,1)$, то по определению имеем $U(1) = 1$ и, следовательно, для времени безотказной работы будет справедливо соотношение (8).

Случай 3

Рассмотрим также случай, когда уравнение имеет вид

$$\frac{dv}{dt} = f(v(t), q(t)), \quad (12)$$

начальное условие $v(0) = v_0$, а условие отказа – $v(t) = v_*$.

Пусть $q(t)$ стационарный случайный процесс, что позволяет представить его в виде

$$q(t) = E(t) \cos(\omega_0 t - \varphi(t)), \quad (13)$$

где $E(t)$ – огибающая процесса, $\varphi(t)$ – фаза процесса, ω_0 – некоторая частота в полосе, где в основном сосредоточен спектр случайного процесса.

Аппроксимируем случайный процесс $E(t)$ процессом $\tilde{E}(t)$ с кусочно-постоянными реализациями, имеющими вид

$$\tilde{E}(t) = \xi_i \text{ при } t \in [\tau(i-1), \tau i], i = 1, 2, 3, \dots,$$

здесь ξ_i – взаимно независимые одинаково распределенные случайные величины, у которых функция распределения совпадает с одномерной функцией распределения случайного процесса $E(t)$, τ – время корреляции процесса $E(t)$.

В этом случае исходный процесс $q(t)$ заменяется случайным процессом $\tilde{q}(t)$ представляющим собой последовательность блоков продолжительностью τ , каждый из которых состоит из синусоид с амплитудой ξ_i .

С учётом введенной аппроксимации представим (3.41) в виде $v_{n+1} = v_n + \tau f(v_{n+1}, \xi_{n+1})$, где $v_n = v(\tau n)$, $n = 0, 1, 2, \dots$ последовательность зависимых случайных величин.

Учитывая, что последовательность (v_{n+1}, ξ_{n+1}) образует однородную марковскую цепь, на основании центральной предельной теоремы получим для ВБР

$$P(t) = \Phi(u) + \frac{Q(u)}{\sqrt{n}} \Phi'(u) + o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right). \quad (14)$$

Для математического ожидания и дисперсии времени до первого отказа T можно получить следующие асимптотические оценки

$$\mathbf{E}T = \int_{v_0}^{v_*} \frac{dx}{\mathbf{E}f(x, \xi_1)}, \quad (15)$$

$$\mathbf{D}T = \tau \mathbf{E}(T) \frac{\mathbf{D}f(v_0, \xi_1)}{[\mathbf{E}f(v_0, \xi_1)]^2}. \quad (16)$$

Для частного случая (9) из (4–6) будем иметь

$$P(t) = 1 - \Phi(-u) + \frac{\mu_3}{6\sqrt{n}\sigma^3} (1 - v^2) \Phi'(u), \quad (17)$$

$$\mathbf{E}T = \frac{z_v}{\mu_1}, \quad \mathbf{D}T = \frac{\sigma_1}{\mu_1^3} z_v. \quad (18)$$

Здесь

$$\mu_1 = \mathbf{E}f_2, \quad \sigma_1 = \mathbf{D}f_2, \quad \mu_3 = \mathbf{E}(f_2 - \mu_1)^3, \quad u = \frac{z_v - n\mu_1}{\sigma_1 \sqrt{n}}, \quad z_v = \int_{v_0}^{v_*} \frac{dx}{f_1(x)}.$$

Приведённые асимптотические представления вероятностных характеристик имеют достаточно простой вид, что позволяет эффективно использовать их при решении прикладных задач. Вместе с тем задача определения корреляционных функций, функций распределения огибающей

и других необходимых вероятностных характеристик может оказаться весьма сложной.

РЕФЛЕКСИЯ

Задание в группы.

1. Представьте в группе в виде схемы сравнительный анализ трех рассмотренных случаев. В схеме должно быть отражено, в чем сходство и отличие в математическом описании этих случаев.
2. В чем преимущество асимптотических методов по сравнению с методом, рассмотренном на прошлом занятии?
3. В чем вы видите недостатки асимптотического метода?
 - Для случая 1 подробно рассмотреть результат для стационарного процесса
 - Презентация у доски

Занятие 13. Совместное проявление внезапных и постепенных отказов

Цели занятия. Показать, что отказы, как правило, являются зависимыми. Рассмотреть решение задачи о нахождении ВБР для случаев независимых и зависимых отказов, дать сравнительный анализ.

Ход занятия

ВЫЗОВ

1. Фронтальная беседа.

Напомнить следующие определения стандарта:

- Независимый отказ: отказ, не вызванный прямо или косвенно другим отказом или неисправностью.
- Зависимый отказ: отказ, вызванный другим отказом или неисправностью.
- Период износовых отказов: период в жизни изделия, если он существует, в течение которого параметр потока отказов восстанавливаемого изделия или интенсивность отказов восстанавливаемого изделия увеличиваются со временем.

Обсудить важность зависимых отказов и наиболее вероятное время их возникновения в период жизни изделия.

2. Организация групп. В группе 4 – 5 человек.

Задание в группы.

- Предложить примеры, иллюстрирующие зависимые и независимые отказы изделия
- Проанализировать причины и характерные черты возникновения отказа для предложенных примеров

ОСМЫСЛЕНИЕ

Чтение текста. Работа индивидуальная.

Совместное проявление внезапных и постепенных отказов

В условиях реальной эксплуатации изделия наиболее характерной является потеря им работоспособности в результате отказа, который, как правило, сочетает черты как внезапного, так и постепенного отказов.

При совместном проявлении постепенных и внезапных отказов значение ВБР $P(t)$ объекта может быть определено по теореме умножения вероятностей, так как событие не наступления отказа объекта на интервале $[0, t]$ заключается в выполнении двух событий: не наступление постепенного отказа и не наступление внезапного отказа.

В случае, когда указанные события независимы будем иметь

$$P(t) = P_B(t) \cdot P_n(t), \quad (1)$$

где $P_n(t)$ – вероятность не наступления постепенного отказа на интервале $[0, t)$, $P_B(t)$ – вероятность не наступления внезапного отказа на интервале $[0, t)$.

Например, предполагая, что ВБР при внезапных отказах подчиняется экспоненциальному закону $P_B(t) = e^{-\lambda t}$, а ВБР при постепенных отказах описывается нормальным законом можно определить из (1) конкретное выражение для $P(t)$

$$P(t) = \left[0,5 + \Phi \left(\frac{v_* - v_0 - \bar{\gamma}t}{\sqrt{\sigma_{v_0}^2 + \sigma_{\gamma}^2 t^2}} \right) \right] \cdot e^{-\lambda t}.$$

Из анализа данного выражения следует, что в начальный период эксплуатации объекта до момента t_1 основное влияние на ВБР оказывают внезапные отказы, а в дальнейшем – постепенные.

В предположении о независимости событий состоящих в наступлении внезапного и постепенного отказов рассмотрим решение задачи об определении ВБР объекта на интервале $[t_1, t_2)$ при условии, что объект не отказал на интервале $[0, t_1)$. В данном случае формула (1) примет вид

$$P(t_1, t_2) = P_B(t_1, t_2) \cdot P_n(t_1, t_2). \quad (2)$$

Величины $P_B(t_1, t_2)$ и $P_n(t_1, t_2)$ есть условные вероятности безотказной работы объекта на интервале $[t_1, t_2)$ при условии, что объект не отказал на интервале $[0, t_1)$ для внезапных и постепенных отказов. Согласно теореме умножения вероятностей для них будем иметь следующее представление

$$P_i(t_1, t_2) = P_i(t_2) / P_i(t_1), i = B, n.$$

Например, для случая, когда ВБР при внезапных отказах подчиняется экспоненциальному закону $P_B(t) = e^{-\lambda t}$, а ВБР при постепенных отказах определяется нормальным законом с параметрами $N(\bar{T}, \sigma_T^2)$, что характерно для постепенных отказов при износе, будем иметь

$$P(t_1, t_2) = \exp[-\lambda(t_2 - t_1)] \cdot \frac{\int_{t_1}^{\infty} e^{-(\tau - \bar{T})^2 / 2\sigma_T^2} d\tau}{\int_{t_1}^{\infty} e^{-(\tau - \bar{T})^2 / 2\sigma_T^2} d\tau}. \quad (3)$$

Если объект не находился в эксплуатации т.е. $t_1 = 0$, $\int_{t_1}^{\infty} e^{-(\tau - \bar{T})^2 / 2\sigma_T^2} d\tau = 1$, то из формулы (3) получим

$$P(t) = \exp[-\lambda(t)] \cdot \int_t^{\infty} e^{-(\tau - \bar{T})^2 / 2\sigma_T^2} d\tau.$$

На рис. 1а приведена зависимость $P(t)$ при $\lambda^{-1} > \bar{T}$, а на рис. 1б при $\lambda^{-1} < \bar{T}$.

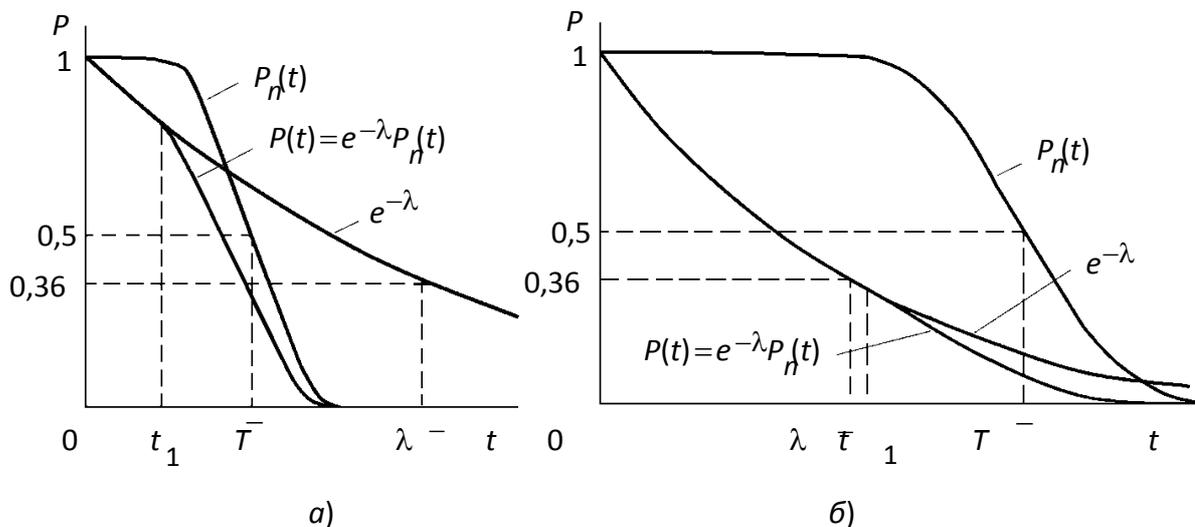


Рис. 1 Вероятность безотказной работы для $\lambda^{-1} > \bar{T}$ (а), для $\lambda^{-1} < \bar{T}$ (б).

Анализ функции $P(t)$ показывает, что до наработки t_1 равной приблизительно $0,4\bar{T}$ значения ВБР объекта практически не отличается от $P_g(t)$. Действительно значения $P_n(t)$, определяемые функцией нормального распределения уменьшаются на этом интервале от значения равно единице до 0,97. Позднее, вследствие накопления необратимых повреждений, начинают преобладать постепенные отказы и кривая ВБР, учитывающая совместное проявление внезапных и постепенных отказов, проходит ниже кривой, описывающей ВБР объекта при постепенных отказах.

В случае, когда объект уже находился в эксплуатации в течение времени t_0 , запишем формулу (3) в следующем виде

$$P(t) = \exp[-\lambda(t)] \cdot \frac{\int_{t_0+t}^{\infty} e^{-(\tau-\bar{T})^2/2\sigma_T^2} d\tau}{\int_{t_0}^{\infty} e^{-(\tau-\bar{T})^2/2\sigma_T^2} d\tau}.$$

Очевидно, что $P(0) = 1$. На рис. 2 воспроизведён результат рис.1а в предположении о наличии начальной наработки t_0 .

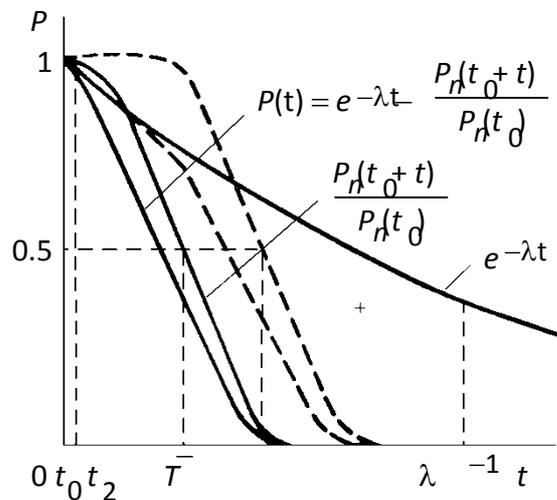


Рис. 2 ВБР объекта с учётом начальной наработки

В начале, т.е. при $t_0 = 0$ ВБР $P(t)$ совпадает с $P_B(t)$ до момента $0,4\bar{T}$. После того, как наработка достигает величины $0,4\bar{T}$ ВБР $P(t)$ следует экспоненциальной зависимости только на небольшом участке за t_0 , а затем быстро убывает после t_2 , т.е. когда наработка объекта становится больше величины t_2 . Пунктиром изображены результаты рис. 1а.

Во многих случаях механизм возникновения отказа может содержать в себе элементы как постепенных, так и внезапных отказов. В этом случае необходимо рассматривать схему возникновения отказа, учитывающую последовательность и взаимосвязь причин, приводящих к отказу.

Предположим, что сначала проявляется причина (событие A), инициирующая процесс изменения вектора качества. Возникновение события A соответствует закономерности внезапного отказа. Процесс изменения вектора качества $v(t)$ приводит к отказу объекта, т.е. к возникновению события B . Последнее является зависимым от события A т.к. процесс изменения вектора качества может происходить только после наступления события A .

Таким образом, наступление отказа является сложным событием (AB), поэтому по формуле полной вероятности вероятность отказа будет равна

$$P(AB) = P(A)P(B | A).$$

С учётом того, что ВБР работы для внезапных отказов равна $P_B(t) = 1 - P(A)$, а для постепенных – $P_n(t) = 1 - P(B | A)$ получим

$$P(t) = 1 - (1 - P_g(t))(1 - P_n(t)) = P_g(t) + P_n(t) - P_g(t)P_n(t). \quad (4)$$

Предположим, что $P_g(t) = 0,9$ и $P_n(t) = 0,95$, тогда ВБР 9 при независимости событий состоящих в наступлении внезапных и постепенных отказов равна $P(t) = 0,885$, а при зависимости - согласно (4) – $P(t) = 0,995$.

Возможны и более сложные схемы возникновения отказа, сочетающие в той или иной степени черты как внезапных, так и постепенных отказов.

РЕФЛЕКСИЯ

Задание в группы.

- Попытайтесь получить схему возникновения отказа, учитывающую последовательность и взаимосвязь причин, приводящих к отказу в предложенных примерах
- Презентация у доски, совместный анализ правильности предложенного решения

7. Надёжность систем

Представлена разработка темы «Надёжность систем», которая является заключительной частью курса и изучается в течение 10 часов.

В таблице представлены распределение материала изучаемой темы по занятиям и цели каждого занятия.

| № | Тема занятия (2 часа) | Цели занятия |
|----|---|---|
| 14 | Надёжность систем Система и её характеристики | Рассмотреть особенности сложных технических систем, способы формализации реальных систем с использованием понятия структурная схема. Основные типы соединения элементов системы. Привести примеры перехода от реальной системы к структурной схеме. |
| 15 | Определение вероятности безотказной работы системы с последовательным соединением элементов | Рассмотреть постановку и методику решения задачи по определению вероятности безотказной работы системы с последовательным соединением элементов. Рассмотреть решение типовых задач. |
| 16 | Определение вероятности безотказной работы системы с параллельным соединением элементов. Система с нагруженным резервом. | Рассмотреть постановку и методику решения задачи по определению вероятности безотказной работы системы с параллельным соединением элементов – случай нагруженного резерва. Рассмотреть решение типовых задач. |
| 17 | Определение вероятности безотказной работы системы с параллельным соединением элементов. Система с ненагруженным резервом | Рассмотреть постановку и методику решения задачи по определению вероятности безотказной работы системы с параллельным соединением элементов – случай ненагруженного резерва. Рассмотреть решение типовых задач. Рассмотреть модель «гибели» и её применение для расчёта ВБР системы. Выполнить исследования по сравнению надёжности систем с различными структурными схемами. |
| 18 | Применение формулы Байеса для расчёта надёжности систем | Показать возможности применения формулы Байеса для расчёта ВБР систем как с типовыми (параллельное, последовательное) типами соединения элементов, так и нестандартными типами соединения. |

ХОД ЗАНЯТИЙ

Занятие 14. Надежность систем. Система и ее характеристики.

Необходимые пояснения.

Изучение темы «Надежность систем» в активных методах начинается с вводного слов преподавателя об учебном плане курса, месте изучаемой темы в курсе, особенностях работы в активных методах.

Часть 1. Понятие «система»

ВЫЗОВ

1. 1. Вопросы преподавателя.

1. Что такое система? Где встречается это понятие и чем характеризуется?

Приведите примеры известных вам систем.

(Система здравоохранения, нервная система, отопительная система).

2. Что общего у таких разных объектов, почему мы говорим о системе?

(Система состоит из взаимосвязанных элементов).

3. Приведите примеры технических систем. Из чего они состоят? Может ли элемент системы быть в свою очередь тоже системой? Приведите пример.

1.2. Индивидуальное задание.

Запишите каждый у себя в тетради:

Система – это ...

Студенты зачитывают свои определения.

1.3. Организация групп. В группе 4 – 5 человек.

1.4. Задание в группы.

Вам в группы предлагается 6 утверждений. У каждого утверждения поставьте значок: «+» – согласен, «-» – не согласен, «?» – сомневаюсь.

7. Количество элементов системы влияет на надежность системы в целом.
8. Сложная система в процессе эксплуатации самостоятельно переходит в наиболее устойчивое с точки зрения функционирования состояние.
9. Элемент для рассматриваемой системы определяется в зависимости от уровня рассмотрения решаемых целей и задач.
10. Не все элементы системы влияют на ее надежность.
11. Невозможно обеспечить безотказную работу системы при отказе одного из элементов.
12. ВБР системы всегда зависит от ВБР элементов.

1.5. Фиксация результатов группового обсуждения в таблице на доске.

| Группа/Утверждение | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|--------------------|---|---|---|---|---|---|
| 1 | + | ? | ? | ? | + | + |
| 2 | - | + | + | - | + | - |
| 3 | ? | - | - | - | + | ? |
| 4 | | | | | | |
| 5 | | | | | | |
| 6 | | | | | | |

ОСМЫСЛЕНИЕ.

Чтение текста о системах. Работа индивидуальная.

Система и её характеристики

Подавляющее большинство технических объектов представляют собой сложные большие системы, состоящие из множества взаимодействующих элементов образующих некоторую целостность. В достаточно общем смысле под *системой* можно понимать упорядоченную совокупность взаимосвязанных и взаимодействующих элементов, образующих единое функциональное целое, предназначенное для решения определенных задач. Современные системы в различных областях техники (машиностроение, радиоэлектроника и т.д.) представляют собой совокупность десятков, сотен, тысяч взаимодействующих между собой элементов. Широко используется

термин «сложная система», понимая под этим многоуровневую систему из взаимодействующих элементов, объединённых в подсистемы различных уровней.

Расчет, прогнозирование поведения систем представляет собой чрезвычайно актуальную, но в то же время и весьма сложную проблему.

С позиции теории надёжности системы обладают рядом особенностей, различным образом влияющих на их надёжность. В своем большинстве системы состоят из значительного числа элементов, что в целом ведет к снижению надёжности системы. При этом за счет разброса свойств и характеристик элементов даже одинаковые системы обладают выраженными свойствами индивидуальности и, как правило, чем сложнее система, тем более ярко проявляется индивидуальность, что, в конечном счете, также влияет на надёжность. Характерной особенностью сложных систем является свойство самоорганизации, т.е. система в процессе эксплуатации самостоятельно переходит в наиболее устойчивое с точки зрения функционирования состояние. Это достигается за счёт внутреннего перераспределения взаимодействия между элементами системы.

Важным понятием при рассмотрении сложных систем является понятие элемента. Под *элементом* понимается некоторая часть системы, предназначенная для выполнения определённых функций и неделимая на составные части на данном уровне исследования. Отсюда следует, что элемент характеризуется индивидуальными входными и выходными параметрами.

Очевидно, что деление системы на элементы является неоднозначной процедурой и, как следует из определения, в значительной степени зависит от поставленных задач и имеющихся возможностей анализа.

Отметим некоторые особенности элементов: во-первых, элемент для рассматриваемой системы определяется в зависимости от уровня рассмотрения решаемых целей и задач, во-вторых, при анализе надёжности системы элемент является неделимой частью системы, в не зависимости от его сложности.

Наличие значительного числа элементов в системе позволяет говорить о различном влиянии различных элементов на надёжность системы в целом. Многие из элементов являются второстепенными и практически не влияют на надёжность системы, а оказывают влияние на ее эффективность.

Функционирование элемента как составляющего системы может следующим образом влиять на систему в целом: изменение выходных

параметров элемента влияет лишь на работоспособность самого элемента; отказ элемента ведет к отказу системы; выходные параметры элемента участвуют в формировании выходного параметра системы, определяющего ее работоспособность; выходные параметры системы существенно влияют на работоспособность других элементов системы.

С указанной точки зрения могут быть выделены следующие виды систем:

- расчленённые – отказ элементов системы является независимым событием;
- связанные – отказ элементов является зависимым событием и определяется изменением выходных параметров системы в целом;
- комбинированные – состоящие из более простых систем со связанной структурой и с независимым формированием их показателей надёжности.

Для радиоэлектроники более характерны системы расчлененного вида, а для машиностроения – связанные. В целом же любая система в той или иной степени сочетает черты этих двух видов, т.е. является комбинированной.

При разработке математических методов расчета надёжности систем необходима их классификация по различным признакам, а затем и формализация характеристик для создания математического описания.

Укажем некоторые признаки, в соответствии с которыми может быть выполнена классификация систем.

Системы делятся на две основные группы: восстанавливаемые и невосстанавливаемые.

Восстанавливаемым называется объект, работоспособность которого в случае возникновения отказа подлежит восстановлению в рассматриваемых условиях, т.е. выявляется и устраняется отказ (повреждение). В противном случае объект является невосстанавливаемым, т.е. при возникновении первого отказа он не подлежит восстановлению.

Применяемые конструктивные решения дают возможность восстановления работоспособности системы без прекращения ее функционирования за счет проведения ремонтных работ. Важной характеристикой является время восстановления. Если время восстановления пренебрежимо мало по сравнению со временем жизни элемента, то обычно считают, что восстановление происходит мгновенно, т.е. в момент отказа элемент заменяется новым. Во многих случаях временем восстановления

нельзя пренебречь т.к. оно сравнимо со временем жизни системы, т.е. имеем процесс восстановления с конечным временем восстановления.

Часто необходима дальнейшая детализация периода восстановления, например, время обнаружения неисправного элемента и время замены его новым.

Для повышения объекта при отказе надёжности систем применяется резервирование. Под термином *резервирование* понимается применение дополнительных средств и (или) возможностей с целью сохранения работоспособного состояния объекта при отказе одного или нескольких его элементов.

Существуют различные виды резервирования: структурное, временное, функциональное и т.д.

Структурное резервирование – резервирование с применением резервных элементов структуры объекта.

Временное резервирование – резервирование с применением резервов времени.

Частным случаем понятия резервирования является *дублирование* – в этом случае основному элементу придается один резервный, т.е. элемент, предназначенный для обеспечения работоспособности объекта в случае отказа основного элемента.

При рассмотрении системы предполагается, что ее структура и характер работы известны настолько насколько необходимо, чтобы сделать заключение для любой совокупности элементов – вызывает ли отказ этой группы отказ системы в целом. В связи с этим можно рассматривать надёжность систем с зависимыми и независимыми элементами.

Допущение о том, что отказ элементов происходит независимо друг от друга, т.е. отказ любой группы элементов не изменяет надёжности других элементов, является очень сильным допущением и в реальных системах оно, как правило, не выполняется.

Возможно введение и других классификационных критериев, дающих большую детализацию.

1. Обсуждение результатов, зафиксированных в таблице до чтения текста. Внесение необходимых исправлений с учетом полученной новой информации.

2. Задание в группы.

Представьте классификацию систем по различным основаниям.

3. Презентация у доски.

4. Индивидуальное задание.

Вернитесь к своему определению системы, и если это необходимо, дополните и исправьте его. Зачитайте свое определение.

Часть 2. Способы формализации реальных систем. Понятие структурных схем.

ВЫЗОВ.

2.1. Беседа преподавателя.

Нас интересует в рамках данного курса надежность систем. Для расчета надежности сложных объектов, состоящих из большого количества элементов, могут использоваться различные подходы, упрощающие расчеты. По-существу, мы создаем модель системы.

2.2. Вопрос.

Нам знакомы различные модели: игрушечный автомобиль, кукла, глобус. Как вы понимаете, что такое модель?

2.3. Задание.

В тетради напишите определение (каждый индивидуально): модель - это

2.4. Вопрос.

Совершенно очевидно, что модели создаются для решения различных задач, например, игрушечный автомобиль для детей – это тоже модель, решающая определенные задачи.

Но что необходимо отразить в этой модели – машине - для того, чтобы рассчитать ее надежность?

2.5. Задание в группы. Изобразите на бумаге модель автомобиля, подходящую для того, чтобы выполнить интересующую нас в рамках данного курса задачу - рассчитать его надежность.

2.6. Презентация рисунков от группы. Обсуждение.

2.7. Индивидуальное задание. Вернитесь к определению модели, исправьте, дополните его, если это необходимо.

2.8. Вопрос.

Мы будем изучать метод структурных схем – модель, которая применяется при расчете надежности систем. Что, на ваш взгляд, должно быть отражено в этой модели? (Количество элементов и способ их соединения)

ОСМЫСЛЕНИЕ

Индивидуальное задание – прочитать текст, делая пометки на полях: + - абсолютно понятно, ? – требуется пояснение.

Под **структурной схемой** системы понимается графическое изображение совокупности её структурных элементов и функционально-логических связей между ними, предназначенное для формализации условий работоспособности.

Структурный элемент системы – условный элемент, обладающий количественными характеристиками надёжности некоторой совокупности последовательно соединённых (в функциональном смысле) реальных элементов системы.

Структурные схемы создаются в виде ориентированного, полуориентированного и неориентированного графов. При изображении все элементы системы равноценны, что подчёркивается их одинаковым графическим изображением.

Элементы, отказ которых приводит к отказу системы, соединяются последовательно. Если элементы системы имеют дублирующие элементы, то в этом случае структурные элементы соединяются параллельно.

Необходимо подчеркнуть, что соединение элементов в реальной системе и соединение структурных элементов в структурной схеме необязательно должны совпадать.

На рис. 4.2 на примере системы, обеспечивающей фильтрацию жидкости, показана разница.

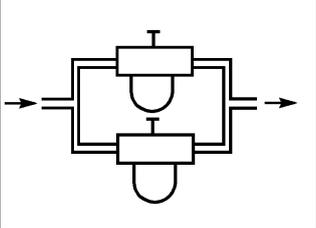
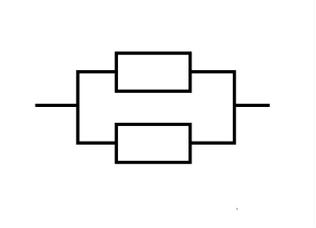
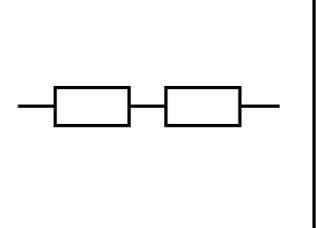
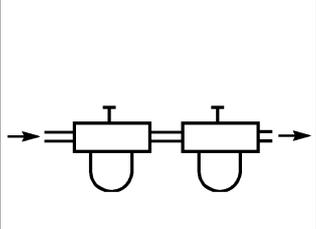
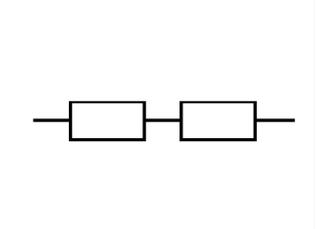
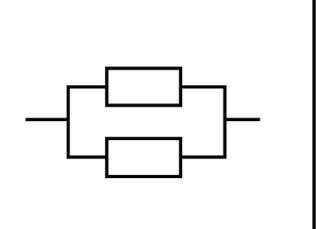
| Конструктивная схема | Структурная схема | |
|---|---|--|
| | Вид отказа | |
| | Засорение сетки | Разрыв сетки |
|  |  |  |
|  |  |  |

Рис. 4.2. Конструктивная и структурная схемы системы

Элементом системы в данном случае является фильтр, отказ которого может произойти либо в результате засорения фильтрующей сетки, либо её разрыва. В случае отказа системы из-за засорения сетки схемы соединения структурных элементов и конструктивных элементов совпадают, т.к. отказ любого из фильтров (элементов) приводит к отказу системы. В случае отказа фильтра из-за разрыва сетки структурная схема не совпадает со схемой соединения элементов в системе. При параллельном соединении фильтров отказ любого из них приведет к тому, что неочищенная жидкость пойдет через него и фильтрация не будет выполнена. При последовательном соединении фильтров отказ одного из них не будет означать отказа системы, т.к. оставшийся фильтр будет выполнять свои функции.

Разработка структурной схемы реальной системы включает в себя несколько основных этапов.

На первом этапе производится описание работы системы, т.е. рассматривается функционирование системы на конечном промежутке времени, определяется конкретное содержание термина «работоспособное состояние».

На следующем этапе выполняется классификация отказов элементов системы и системы в целом, оценивается влияние отказа каждого элемента на работоспособное состояние системы.

Третий этап посвящен составлению собственно структурной схемы реальной системы. С этой целью изучается поведение системы при отказе каждого из составляющих ее элементов. В ряде случаев при отказе одного элемента происходит отказ всей системы. В тоже время, возможно, что

система остается частично или полностью работоспособной при наличии работоспособных и отказавших элементов.

При разработке структурных схем, как правило, применяют три основных способа соединения элементов:

– последовательное соединение (рис. 4.3а) соответствует случаю, когда при отказе любого элемента отказывает вся система или система работоспособна только в случае работоспособности всех элементов её составляющих; наработка до отказа системы T равна наработке до отказа того элемента, у которого она оказывается минимальной

$$T = \min\{T_i\}, \quad i = \overline{1, n},$$

где n – число элементов системы;

– параллельное соединение (рис. 4.3б) соответствует случаю, когда система остается работоспособной пока работоспособен хотя бы один элемент из n элементов системы; наработка до отказа T системы равна максимальному из значений наработки до отказа элементов

$$T = \max\{T_i\}, \quad i = \overline{1, n};$$

– соединение (рис. 4.3в), при котором в случае отказа элемента вместо него включается резервный элемент; наработка системы до отказа T равна сумме наработок до отказа всех элементов системы

$$T = \sum_{i=1}^n T_i.$$

Соединения элементов, указанные во втором и третьем способах, несут соответственно название нагруженного и ненагруженного резерва.

При этом под нагруженным резервом понимается резерв, который содержит один или несколько резервных элементов, функционирующих в режиме основного элемента. В случае ненагруженного резерва, резервные элементы находятся в ненагруженном состоянии.

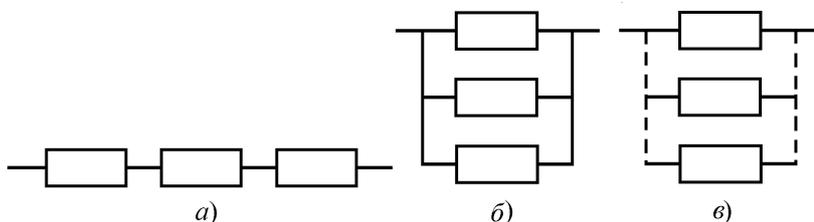


Рис. 4.3. Способы соединения элементов в структурных схемах

Отметим, что не всегда имеется возможность представить систему в виде схемы, состоящей из комбинации последовательного и параллельного соединенных элементов.

Пример системы, структурная схема которой не сводится к подобной комбинации, приведён на рис. 4.4.

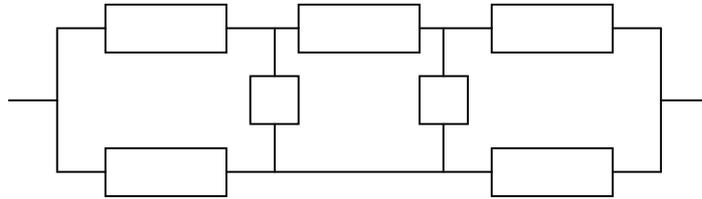


Рис. 4.4. Структурная схема, не сводящаяся к комбинации последовательно и параллельно соединенных элементов

Если структурная схема сложной системы построена и для каждого элемента определена вероятность безотказной работы, то, используя результаты теории вероятностей, можно найти вероятность безотказной работы системы.

Рассмотрим вопросы расчёта схемной надёжности систем.

Предполагаем, что система состоит из n элементов, время жизни i -го элемента T_i есть случайная величина с функцией распределения $F_i(t) = P\{T_i < t\}$.

Введем следующие предпосылки:

- отказы элементов предполагаются независимыми, т.е. отказ любого элемента не влияет на характеристики остальных, при этом случайные величины T_i независимы;
- состояние элементов системы (работоспособен – неработоспособен) однозначно определяет состояние всей системы;
- после отказа работоспособное состояние элемента не восстанавливается.

РЕФЛЕКСИЯ.

1. В группах обсудить прочитанный материал.

2. Задание в группы.

Составить вопросы на проверку усвоения и понимания материала.

Для этого:

А) Необходимо выделить категории информации, касающиеся структурных схем.

1. Этапы разработки
2. Виды соединений.

Б) Составьте в группе 2 вопроса – один по первой категории, другой по второй категории. Желательно, чтобы вопросы бы были составлены на понимание информации, а не на простое воспроизведение. Главное условие – вы сами должны суметь ответить на заданные вами вопросы.

В) Вопросы зафиксируйте письменно на листке бумаги.

3. Задание в группы

Ответить на вопросы. Каждая группа передает составленные вопросы последующей группе, в свою очередь получает вопросы от предыдущей группы.

Ответы на вопросы фиксируются письменно.

4. Вопросы и ответы поочередно заслушиваются в аудитории.

Все студенты выступают экспертами, оценивая ответы товарищей, при необходимости внося дополнения. Заключительное слово по оценке качества ответа на вопрос предоставляется группе – составителю вопросов.

5. Подведение итогов занятия преподавателем.

Занятие 15.

Определение вероятности безотказной работы системы с последовательным соединением элементов.

ВЫЗОВ.

Вопросы преподавателя.

1. Итак, для того, чтобы оценить надежность системы в целом, какие сведения нам необходимы? (ВБР элементов системы, способ их соединения)

2. Что означает для системы последовательное соединение элементов, каковы допущения при математических расчетах?

(В модель вносится допущение – отказ 1-го элемента является независимым событием).

3. Какие показатели надежности существуют? При необходимости фиксируем на доске.

ОСМЫСЛЕНИЕ.

1. Задание.

При чтении текста поставить пометки + ясно, ? - требует разъяснения.

2. Чтение текста (индивидуально).

Система с последовательным соединением элементов

Как уже отмечалось, последовательным, с точки зрения надёжности, является такое соединение элементов в системе, при котором отказ хотя бы одного элемента приводит к отказу всей системы (рис. 4.3а).

Если известны ВБР элементов системы, то в предположении их независимости ВБР системы для момента времени t определится

$$P(t) = \prod_{i=1}^n P_i(t). \quad (4.1)$$

Если $\sum_{i=1}^n Q_i(t) \ll 1$, то для величины отказа

$Q(t) = 1 - P(t)$ справедлива приближённая формула

$$Q(t) \approx \sum_{i=1}^n Q_i(t), \quad (4.2)$$

погрешность, которой не превосходит значения $0,5 \cdot \left(\sum_{i=1}^n Q_i(t) \right)^2$.

Действительно, в случае последовательного соединения имеем

$$Q(t) = 1 - P(t) = 1 - \prod_{i=1}^n (1 - Q_i(t)).$$

По индукции можно доказать неравенство

$$1 - \sum_{i=1}^n Q_i(t) < \prod_{i=1}^n (1 - Q_i(t)) < 1 - \sum_{i=1}^n Q_i(t) + \\ + \sum_{i=2}^n Q_{i-1}(t)Q_i(t) < 1 - \sum_{i=1}^n Q_i(t) + 0,5 \left(\sum_{i=1}^n Q_i(t) \right)^2.$$

Отсюда следует, что, если $\sum Q_i(t) \ll 1$, то справедлива приближённая формула (4.2). Из формулы (4.1) следует, что за счёт большого количества даже высоконадёжных элементов, системы с последовательным соединением элементов могут обладать низкой надёжностью.

Например, если в систему входят 50 равнонадёжных элементов, для которых ВБР для заданного промежутка времени равна $P_i(t) = 0,99$, то ВБР системы равна $P(t) \approx 0,55$. Увеличив число элементов до 400 будем иметь $P(t) = 0,018$, т.е. система является практически неработоспособной.

Используя зависимость между величинами $P(t)$ и $\lambda(t)$ можно записать для системы из n последовательно соединённых элементов

$$P(t) = \exp \left\{ - \sum_{i=1}^n \int_0^t \lambda_i(s) ds \right\} = \exp \left\{ - \int_0^t \lambda(s) ds \right\}, \quad (4.3)$$

где $\lambda(s) = \sum_{i=1}^n \lambda_i(s)$.

Для экспоненциального закона, когда $\lambda_i(t) = \lambda_i = \text{const}$ имеем $P(t) = \exp\{-\lambda t\}$, где $\lambda = \sum_{i=1}^n \lambda_i$ — интенсивность отказов системы. Отсюда следует, что ВБР системы в этом случае также будет подчиняться экспоненциальному закону. Величина среднего времени до отказа определяется следующим образом

$$\bar{T} = \lambda^{-1} = \left(\sum_{i=1}^n \frac{1}{T_i} \right)^{-1}. \quad (4.4)$$

В табл. 4.1. приведены точные и приближенные выражения для основных показателей надёжности системы с последовательным соединением элементов при экспоненциальном распределении времени до отказа ее элементов. Приближенное выражение получено при условии $\lambda t \ll 1$.

Таблица 4.1

Значения показателей надёжности

| Показатель надёжности | Точное выражение | Приближённое выражение |
|-----------------------|--------------------|------------------------|
| $P(t)$ | $\exp(-\lambda t)$ | $1 - \lambda t$ |
| \bar{T} | $1/\lambda$ | |

Отметим, что если все элементы, составляющие систему, являются стареющими, т.е. для которых выполняется условие $\lambda(t_2) \geq \lambda(t_1), t_2 > t_1$, то и вся система будет стареющей, и для её характеристик будут иметь место следующие неравенства

$$1 \geq P(t) \geq \exp(-t) \sum_{i=1}^n \frac{1}{\bar{T}_i}, \quad \bar{T} \geq \left(\sum_{i=1}^n \frac{1}{\bar{T}_i} \right)^{-1}.$$

РЕФЛЕКСИЯ

1. Задание в группы. Обсудите прочитанный материал. Если у кого-либо в группе при прочтении текста появились значки «непонятно», постарайтесь вместе разобраться. При необходимости обратитесь за разъяснениями к преподавателю.

2. Задание в группы. В каждую группу выдается таблица. Обсудите результаты оценки надежности систем с последовательным соединением элементов и письменно напишите в правом столбце, что означают эти результаты.

| | |
|--|--|
| Результаты для оценки надежности систем с последовательным соединением элементов | |
| 1) Вероятность безотказной работы | |
| $P(t) = \prod_{i=1}^n P_i(t)$ | |

| | |
|--|--|
| $1 - \sum_{i=1}^n Q_i(t) < \prod_{i=1}^n (1 - Q_i(t)) < 1 - \sum_{i=1}^n Q_i(t) +$ $2) \quad + \sum_{i=2}^n Q_{i-1}(t)Q_i(t) < 1 - \sum_{i=1}^n Q_i(t) + 0,5 \left(\sum_{i=1}^n Q_i(t) \right)^2.$ | |
| <p>3) ВБР системы в случае подчинения ВБР элементов экспоненциальному закону, также будет подчиняться экспоненциальному закону. Величина среднего времени до отказа определится следующим образом</p> $\bar{T} = \lambda^{-1} = \left(\sum_{i=1}^n \frac{1}{\bar{T}_i} \right)^{-1}.$ | |
| $4) \quad 1 \geq P(t) \geq \exp(-t) \sum_{i=1}^n \frac{1}{\bar{T}_i}, \quad \bar{T} \geq \left(\sum_{i=1}^n \frac{1}{\bar{T}_i} \right)^{-1}.$ | |

3. Решение задач.

Необходимые пояснения. На первом этапе организуется работа в парах. Каждая пара решает свою задачу. После того, как пара справляется с задачей, образуется группа из 4-х человек. В группе происходит обсуждение обеих решенных задач.

Задания в группы.

1. Решить задачу в паре.

2. Объединиться в группу и объяснить друг другу решение задач.

3. Проанализировать полученные численные значения и сделать выводы по вероятности безотказной работы системы (число элементов, элементы одинаковой и различной надежности, зависимость надежности системы от самого слабого с точки зрения надежности элемента).

Задача 1.

Найти ВБР системы состоящей из n последовательно соединенных одинаковых элементов в зависимости от их числа для $n = 2, 4, 8, 16, 64$. ВБР элемента равна 0,99. Дать графическую интерпретацию расчёта. Сравнить результат с расчётом по приближённой формуле.

Задача 2.

Найти ВБР системы состоящей из 3-х последовательно соединенных элементов в предположении о том, что два элемента имеют ВБР равную 0,9999, а третий элемент имеет ВБР равную 0,9; 0,99; 0,999; 0,9999. Дать графическую интерпретацию расчёта. Сравнить результат с расчётом по приближённой формуле.

4) Презентация решения задач и выводов по ВБР у доски.

5) Каждая группа придумывает собственную задачу и передает задачу последующей группе, получая, в свою очередь, задачу от предыдущей группы. Решают задачи и обмениваются результатом решения с презентацией у доски.

Занятие 16.

Системы с параллельным соединением элементов

Беседа преподавателя.

Мы приступаем к изучению надежности систем с резервированием – это системы с параллельным соединением элементов. Точно так же, как понятие системы, понятие модели, понятие «резервирование» применяется и существует не только в технических системах.

1. Как вы понимаете, что такое резервирование? Обсудить всем вместе. На доске зафиксировать ключевые слова.

2. Приведите примеры резервирования в живых и других системах. (У человека – это уши, ноздри, глаза, уши. Во внутренних органах – это, например, почки, т.е., природа также позаботилась о повышении надежности функционирования различных органов у человека).

3. Нас, конечно, в рамках данной темы интересует повышение надежности в механических системах. Обсудите в группе и составьте определение: резервирование – это...

4. Существует множество методов повышения ВБР системы, например, избыточность. Мы будем их обсуждать, но подробно рассмотрим в рамках данного курса методы резервирования с двумя различными режимами

работы резерва: нагруженный и ненагруженный. Преподаватель поясняет разницу между ними.

5. На сегодняшнем занятии мы познакомимся с алгоритмом расчета надежности систем с нагруженным резервом с параллельным соединением элементов.

6. На прошлом занятии мы обсуждали полученные результаты по расчету надежности систем с последовательным соединением.

7. Задание в группу. На прошлом занятии мы получили результаты для оценки надежности систем с последовательным соединением элементов. Они приведены в таблице. Сделайте предположения в группах, справедливы ли эти результаты для систем с параллельным соединением элементов и поставьте соответствующие значки.

+ - да, этот результат используется

- нет, не используется

? – смысловое содержание результата сохраняется, но формула другая

| Результаты для оценки надежности систем с последовательным соединением элементов | С параллельным соединением |
|--|----------------------------|
| <p>1) Вероятность безотказной работы</p> $P(t) = \prod_{i=1}^n P_i(t)$ | |
| <p>2) Величина среднего времени до отказа ВБР системы в случае подчинения ВБР элементов экспоненциальному закону, также будет подчиняться экспоненциальному закону. Величина среднего времени до отказа определится следующим образом</p> $\bar{T} = \lambda^{-1} = \left(\sum_{i=1}^n \frac{1}{\bar{T}_i} \right)^{-1}.$ | |
| <p>3) Оценка ВБР для стареющей системы</p> $1 \geq P(t) \geq \exp(-t) \sum_{i=1}^n \frac{1}{\bar{T}_i}, \quad \bar{T} \geq \left(\sum_{i=1}^n \frac{1}{\bar{T}_i} \right)^{-1}.$ | |

8. Преподаватель фиксирует результаты в таблице на доске.

| Группа/результат | 1 | 2 | 3 |
|------------------|---|---|---|
| 1 | + | ? | ? |
| 2 | - | + | + |
| 3 | ? | - | - |
| 4 | | | |
| 5 | | | |
| 6 | | | |

ОСМЫСЛЕНИЕ.

Чтение текста (индивидуально).

Системы с параллельным соединением элементов

Для повышения надёжности систем применяется резервирование, т.е. помимо основного элемента, обеспечивающего выполнение системой требуемых функций, вводятся резервные элементы, предназначенные для выполнения функций основного элемента в случае отказа последнего.

Применение резервирования для механических систем не носит массового характера. Для повышения надёжности в этом случае более широко используется принцип избыточности. Создание запаса по прочности, жесткости, теплостойкости и т.п. приводит к повышению надёжности объекта, т.к. значения параметров, определяющих его работоспособное состояние, удаляются от допускаемых значений. Для механических систем это выражается в том, что величина ресурса объекта (элементов системы) устанавливается значительно меньше величины среднего срока службы до отказа. Естественно, что при этом в значительной степени не используются потенциальные возможности объекта, но за счет этого повышается ВБР.

Избыточность позволяет непрерывно повышать ВБР системы до требуемого уровня за счет улучшения характеристик отдельных элементов.

Система с нагруженным резервом

При нагруженном резерве все резервные элементы постоянно присоединены к основному и находятся в одинаковом с ним режиме работы (рис.4.3б). Отказ системы наступает только тогда, когда отказывают все

входящие в систему элементы. Т.к. отказы элементов независимы, то вероятность совместного появления всех отказов равна

$$Q(t) = 1 - P(t) = \prod_{i=1}^n Q_i(t) = \prod_{i=1}^n (1 - P_i(t)),$$

отсюда получим выражение для ВБР

$$P(t) = 1 - \prod_{i=1}^n (1 - P_i(t)). \quad (4.5)$$

Постоянное резервирование предоставляет принципиальную возможность создания надёжных систем из относительно ненадёжных элементов.

Например, если ВБР элементов равны $P_i(t) = 0,9$, $i = 1, 2, 3$, то ВБР системы – $P_i(t) = 0,999$ т.е. повышается на два порядка.

Из (4.5) также следует, что если ВБР каждого элемента подчиняется экспоненциальному закону, то ВБР системы с нагруженным резервом уже не будет подчиняться тому же закону. Действительно, в случае системы из n одинаковых элементов с экспоненциальным законом ВБР, для которых $\lambda_i = \lambda$, выражение для ВБР системы примет вид

$$P(t) = 1 - (1 - e^{-\lambda t})^n.$$

Среднее время жизни такой системы определится величиной

$$\bar{T} = \int_0^{\infty} P(t) dt = \int_0^{\infty} [1 - (1 - e^{-\lambda t})^n] dt$$

Выполнив замену $1 - e^{-\lambda t} = x$ или $t = -\lambda^{-1} \ln(1 - x)$ получим

$$\bar{T} = \frac{1}{\lambda} \int_0^1 \frac{1 - x^n}{1 - x} dx = \frac{1}{\lambda} \sum_{i=1}^n \frac{1}{i}. \quad (4.6)$$

Таким образом, полученные результаты для ВБР и среднего времени жизни не совпадают с соответствующими величинами для экспоненциального закона.

При больших n имеет место приближённое выражение

$$\bar{T} = \frac{1}{\lambda} \left[\ln n + c + \frac{1}{2n} \right], \text{ где } c = 0,57712... \text{ – константа Эйлера.}$$

Для экспоненциального закона распределения наработки элементов системы до отказа при малых t справедлива следующая приближённая формула

$$P(t) \approx 1 - t^n \prod_{i=1}^n \lambda_i, \quad (4.7)$$

дающая оценку величины $P(t)$ снизу.

В случае $\lambda = \lambda_i$ будем иметь $P(t) \approx 1 - (\lambda t)^n$, при этом погрешность приближённой формулы не превышает величины $0,5n(\lambda t)^{n+1}$.

РЕФЛЕКСИЯ

Работа в группах.

1. Возврат к таблице, обсуждение в группе, исправление результатов – при необходимости с презентацией у доски. В любом случае – общее обсуждение полученных результатов.
2. Составить таблицу с правильными результатами.

Часть 2. «Схема гибели»

2.1. Задание (индивидуальное).

Одним из общих методов оценки надежности систем является «схема гибели». Она применима и для систем с нагруженным резервом.

В этом методе используются понятия (запись на доске):

Отказ, «схема гибели», неработоспособная система, модель, интенсивность отказов, изменение свойств системы, вероятность отказа.

Попробуйте индивидуально выстроить связь между понятиями. По желанию прочитайте.

ОСМЫСЛЕНИЕ

1. Индивидуальное задание.

Проставить значки + - понятно, ? – требуются пояснения.

2. Чтение текста. Работа индивидуальная.

«Схема гибели»

Для оценки ВБР системы эффективно может применяться модель, носящая название «схема гибели».

Пусть дана система, состоящая из конечного числа элементов, в которой происходят отказы элементов. Предполагаем, что возникающий поток отказов подчиняется следующим условиям:

1. Если к моменту t произошел $(i - 1)$ отказ, то независимо от моментов возникновения этих отказов вероятность того, что на малом участке

$(t, t + \Delta t)$ произойдет один отказ, равна $\mu_i \Delta t + o(\Delta t)$, а вероятность, что не произойдет отказ – $1 - \mu_i \Delta t + o(\Delta t)$.

2. Система становится неработоспособной в момент, когда происходит n -ый отказ и в дальнейшем она уже не меняет своих свойств, т.е. $\mu_{n+1} = 0$.

Эти условия полностью определяют конечный поток отказов и несущественно, какие элементы составляют систему, как они соединены в системе, какие конкретно элементы отказывают, и как влияют одни отказы на другие. Величины μ_i , обычно называемые интенсивностями отказа, неотрицательны и в общем случае могут являться функциями времени.

Если к моменту t произошел $(k-1)$ отказ, то это значит, что система находится в состоянии k . Обозначим через $p_k(t)$ вероятность того, что в момент t система находится в состоянии k . Тогда вероятность отказа системы $Q_n(t)$ – есть вероятность того, что она к моменту t будет находиться в $(n+1)$ состоянии т.е. $p_{n+1}(t) = Q_n(t)$.

Для двух близких состояний в моменты t и $t + \Delta t$ по формуле полной вероятности запишем

$$p_k(t + \Delta t) = p_{k-1}(t)\mu_{k-1}\Delta t + p_k(t)(1 - \mu_k\Delta t) + o(\Delta t).$$

При $\Delta t \rightarrow 0$ получим систему дифференциальных уравнений для нахождения $p_k(t)$:

$$\dot{p}_1(t) = -\mu_1 p_1(t)$$

$$\dot{p}_k(t) = \mu_{k-1} p_{k-1}(t) - \mu_k p_k(t) \quad (k = 2, 3, \dots, n).$$

$$\dot{p}_{n+1}(t) = -\mu_n p_n(t)$$

Начальные условия имеют вид $p_1(0) = 1$, $p_k(0) = 0$ при $k > 1$.

Для случая, когда все величины μ_i различны и не зависят от времени вероятность отказа определяется следующим образом

$$Q_n(t) = 1 - \sum_{i=1}^n \frac{e^{-\mu_i t}}{\mu_i \omega'(-\mu_i)} \mu_1 \mu_2 \dots \mu_n, \quad (4.8)$$

здесь $\omega(x) = (x + \mu_1)(x + \mu_2) \dots (x + \mu_n)$.

В частном случае для $\mu_i = \mu$, будем иметь

$$Q_n(t) = 1 - \sum_{i=0}^{n-1} \frac{(\mu t)^i}{i!} e^{-\mu t}.$$

В тех случаях, когда ВБР элементов, составляющих резервную группу, близки к единице, справедлива приближенная формула

$$Q_n(t) \approx \frac{t^n}{n!} \prod_{i=1}^n \mu_i, \quad (4.9)$$

причем её относительная ошибка не превосходит величины $\frac{t}{n+1} \sum_{i=1}^n \mu_i$.

Выражение (4.9) даёт для вероятности отказа $Q_n(t)$ оценку сверху.

Формула (4.9) справедлива для малых $\mu_i t$, но в этом случае $e^{-\lambda_i t} \approx 1 - \mu_i t$. Из соотношения (4.9) можно сделать вывод, что если ВБР резервных элементов близки к единице, то кратность резервирования бессмысленно делать большой.

В том случае, когда резервная группа состоит из значительного числа элементов невысокой надёжности (величина $\mu_k t$ – конечная, n – велико), будем иметь следующую приближённую формулу

$$Q_n(t) \approx \frac{t^n}{n!} \prod_{i=1}^n \mu_i \cdot \exp\left(-\sum_{k=1}^n \frac{\mu_k}{n} t\right), \quad (4.10)$$

главный член относительной ошибки равен $\frac{1}{2n^2} \sum_{i=1}^n (\mu_i t)^2$.

РЕФЛЕКСИЯ

1. Обсудите то, что непонятно в «схеме гибели» в группе.
2. Вернитесь к связям, которые вы выстроили между понятиями перед чтением текста. Исправьте, при необходимости дополните. В группе создайте наиболее полную схему. Презентация от групп у доски.

Часть 3. Использование модели расчета «схема гибели» для оценки ВБР систем с различной структурой и учетом различных факторов.

ВЫЗОВ.

3.1. Вопрос.

Модели расчета «схема гибели» универсальна и может использоваться для оценки ВБР систем с различной структурой и учетом различных факторов. Назовите, для каких структур она, по вашему мнению, применима и какие факторы могут изменяться и учитываться при расчетах?

ОСМЫСЛЕНИЕ.

3.2. Работа в паре по вариантам.

1 вариант. Текст для 1-го студента из пары.

1) Рассмотрим возможность применения схемы гибели в случае системы с нагруженным резервом, ВБР всех элементов которой подчиняются экспоненциальному закону $P_i(t) = e^{-\lambda_i t}$, $i = \overline{1, n}$.

Для конкретизации модели гибели необходимо определить величины μ_i . На участке времени до первого отказа работоспособными являются n

элементов. Выделим на этом участке малый отрезок времени $(t, t + \Delta t)$. ВБР одного элемента на этом отрезке равна $e^{-\lambda\Delta t}$, а ВБР всех элементов системы $e^{-n\lambda\Delta t} = 1 - n\lambda\Delta t + o(\Delta t)$.

Вероятность появления двух и более отказов на этом временном отрезке имеет порядок малости $(\Delta t)^2$ и, следовательно, вероятность появления ровно одного отказа для всей системы равна $n\lambda\Delta t + o(\Delta t)$. Отсюда следует, что $\mu_1 = n\lambda$.

На участке между первым и вторым отказами работоспособными являются $(n-1)$ элементов, поэтому $\mu_2 = (n-1)\lambda$. Для произвольного участка будем иметь

$$\mu_i = (n-i+1)\lambda, i = \overline{1, n},$$

$$\mu_{i+1} = 0$$

Ввиду того, что отказы элементов независимы и подчиняются экспоненциальному закону, появление отказа элемента не зависит от того, сколько он времени проработал и когда произошли отказы других элементов, т.е. рассматриваемый поток отказов есть поток отказов типа гибели.

Применяя формулу (4.8) получим для вероятности отказа системы следующее выражение

$$Q_n(t) = 1 - \sum_{i=1}^n \frac{n! e^{-i\lambda t}}{i!(n-1)!} (-1)^{i-1} = \sum_{i=0}^n C_n^k (-1)^i e^{-i\lambda t} = (1 - e^{-\lambda t})^n, \quad (4.11)$$

а для средней наработки до отказа – $ET = \bar{T} = \frac{1}{\lambda} \sum_{i=1}^n \frac{1}{i}$.

Для случая, когда ВБР для рассматриваемого промежутка времени мало отличаются от единицы, а число элементов системы велико из приближенной формулы (4.9) получим $Q_n(t) \approx (\lambda t)^n$.

Данные результаты совпадают с результатами, полученными непосредственным применением формул теории вероятностей для параллельного соединения элементов системы.

2 вариант (Текст для 2-го из пары)

Рассмотренные выше методы оценки ВБР системы справедливы для случая, когда отказы элементов её составляющих являются независимыми событиями. В реальных системах данное предложение выполняется редко. Как правило, отказы элементов могут существенно влиять на ВБР других элементов системы за счёт изменения параметров, определяющих их работоспособность. Например, система состоит из n одновременно работающих элементов, выполняющих одну и ту же функцию. Если один или несколько элементов отказали, то на остальные будет приходиться большая

нагрузка, меняются параметры их функционирования и, следовательно, изменяются ВБР оставшихся функционирующих элементов.

Рассмотрим случай нагруженного резерва, когда отказы одних элементов влияют на параметры оставшихся работоспособных элементов: система состоит из n одинаковых элементов, при отказе одного элемента оставшиеся начинают работать в более интенсивном режиме, что в конечном счёте влияет на их ВБР.

Предположим, что на временных интервалах между соседними отказами интенсивность отказа любого элемента системы постоянна, но зависит от числа работоспособных элементов системы. Обозначим через π_k интенсивность отказов k работоспособных элементов. Тогда параметры схемы гибели примут вид

$$\mu_1 = n\pi_n, \dots, \mu_k = (n - k + 1)\pi_{n-k+1}, \mu_{n+1} = 0.$$

Вероятность отказа системы определится согласно (4.8). Согласно приближенной формуле (4.9) будем иметь

$$Q_n(t) \approx t^n \prod_{i=1}^n \pi_i. \quad (4.12)$$

Среднее время до отказа системы равно

$$ET_n = \sum_{i=1}^n \frac{1}{(n - i + 1)\pi_i}. \quad (4.13)$$

РЕФЛЕКСИЯ

Задание 1. В паре вы разбирали различные случаи применения схемы гибели для оценки. Расскажите друг другу о тех конкретных случаях применения «схемы гибели», которые вы рассмотрели.

Задание 2. Заполните таблицу (от группы)

| Структура системы и ее свойства (условия отказа системы, условия работоспособности элементов) | Коэффициенты в «схеме гибели» |
|---|-------------------------------|
| | |
| | |
| | |
| | |

1) Сделайте вывод (структура системы определяет вид коэффициентов).

2) Презентация таблиц, обсуждение

3) Решение задач в группе.

Задача

Система состоит из 3-х параллельно соединенных элементов, ВБР которых подчиняются экспоненциальному закону. Определить ВБР систем:

1. $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda$

2. $\lambda_1 = 10\lambda \quad \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda$

3. $\lambda_1 = 0.1\lambda \quad \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda$

Сравнить результаты и дать объяснение полученным результатам.

6) Презентация от групп.

Занятие 17.

Определение вероятности безотказной работы системы с параллельным соединением элементов. Система с ненагруженным резервом.

Рассмотреть постановку и методику решения задачи по определению вероятности безотказной работы системы с параллельным соединением элементов – случай ненагруженного резерва. Рассмотреть решение типовых задач. Рассмотреть модель «гибели» и её применение для расчёта ВБР системы. Выполнить исследования по сравнению надёжности систем с различными структурными схемами.

Часть 1. Система с ненагруженным резервом.

ВЫЗОВ

1.1. Вопрос.

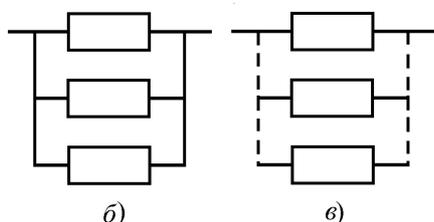
Сегодня мы остановимся на системах с ненагруженным резервом. Вы уже имеете представление об этих системах. Чем характеризуются эти системы? Ответы с места.

1.2. Задание (в пары, затем в группы).

Вам в пары выдан набор понятий, рисунков, формул, и некоторых характеристик, которые относятся к системам с нагруженным и ненагруженным резервом. Поместите их в соответствующий столбец таблицы.

| Система с нагруженным резервом | Система с ненагруженным резервом |
|--------------------------------|----------------------------------|
| | |

Наличие контрольных приборов, переключающие устройства, резервный элемент, отказ системы, кратность резервирования, резервные элементы имеют меньшую надежность, постоянное резервирование, резервные элементы находятся в одинаковом с основным режиме работы, «схема гибели», интенсивность отказа, среднее время до отказа.



$$T = \max\{T_i\}, \quad i = \overline{1, n}; \quad T = \sum_{i=1}^n T_i.$$

Объединитесь в группы. Обсудите в группах полученные результаты. Группы на доске представляют свои результаты.

1.3. Задание.

В каждую группу выдан пакет вопросов. Ваша задача – выделить вопросы, на которые вы знаете ответ. Поставьте около них значок «+». Отвечать на них не надо. Главное - определить те вопросы, на

которые вы пока ответить не можете, около этих вопросов поставьте значок «-».

Вопросы в группы.

1. Приведите пример системы, выделите элементы её составляющие.
2. Приведите пример восстанавливаемой системы.
3. Приведите пример конкретной системы с последовательным соединением структурных элементов.
4. Приведите пример конкретной системы с параллельным соединением структурных элементов.
5. Приведите пример конкретной системы с другим видом резервирования структурных элементов.
6. Какова размерность величин μ_i , используемых в схеме гибели?
7. Учитывается ли в схеме гибели возможность появления двух и более отказов в малый промежуток времени?
8. Как влияет наличие переключающего элемента на ВБР системы с ненагруженным резервом?
9. Как оценивается выигрыш надежности при резервировании систем?
10. Как классифицируются системы по способу подсоединения резервных элементов?
11. В каких режимах могут работать резервные элементы в системах?
12. Если ВБР элементов подчиняется экспоненциальному закону, подчиняется ли ВБР системы с нагруженным резервом экспоненциальному закону?
13. Если ВБР элементов подчиняется экспоненциальному закону, подчиняется ли ВБР системы с ненагруженным резервом экспоненциальному закону?
14. Можно ли утверждать, что чем больше кратность резервирования, тем значительнее преимущества системы с ненагруженным резервом? Почему?
15. Можете ли Вы определить понятие «резервирование».

1.4. От группы зачитайте вопросы, на которые вы в данный момент ответить не можете. На доске преподаватель фиксирует ответы.

| Вопрос/группа | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---------------|---|---|---|---|---|---|
| 1 | + | - | + | + | + | + |

| | | | | | | |
|-----------|---|---|---|---|---|---|
| 2 | - | + | + | - | + | - |
| 3 | + | - | - | - | + | - |
| 4 | | | | | | |
| 5 | | | | | | |
| 6 | | | | | | |
| 7 | | | | | | |
| 8 | | | | | | |
| 9 | | | | | | |
| 10 | | | | | | |
| 11 | | | | | | |
| 12 | | | | | | |
| 13 | | | | | | |
| 14 | | | | | | |
| 15 | | | | | | |

ОСМЫСЛЕНИЕ.

1. Задание. При чтении текста ваша задача – найти ответы на те вопросы, на которые вы не смогли ответить.
2. Чтение текста (индивидуально).

Система с ненагруженным резервом

Возможна система с ненагруженным резервом (рис. 4.3б), т.е. когда система содержит один или несколько резервных элементов, находящихся в ненагруженном режиме до начала выполнения ими функций основного элемента.

Отметим, для работы системы с ненагруженным резервом требуется наличие контрольных приборов, обнаруживающих отказ функционирующих элементов, и переключающих устройств, включающих резервные элементы.

Предполагаем, что резервный элемент не может отказать, находясь в ненагруженном состоянии, и что пребывание в ненагруженном состоянии не изменяет его характеристик в нагруженном состоянии. Считаем также, что отказавший элемент заменяется резервным мгновенно и переключающее устройство абсолютно надёжно.

Рассмотрим систему, состоящую из основного элемента и $(n-1)$ резервных элементов. Обозначим через $P_i(t)$ – ВБР i -го элемента, а через $Q_i(t) = 1 - P_i(t)$ – вероятность отказа i -го элемента. Основной элемент системы, проработав некоторое случайное время T_1 , становится неработоспособным и мгновенно заменяется первым резервным элементом, который функционирует в течение времени T_2 , и т.д. Отказ последнего резервного элемента, проработавшего в течение времени T_n будет означать отказ всей системы.

Время жизни такой системы определяется величиной $T_n = \sum_{i=1}^n T_i$, где случайные величины T_i независимы. Вероятность отказа системы $Q_n(t)$ определяется как закон распределения суммы n независимых слагаемых и находится из соотношений

$$Q_n(t) = \int_0^t q_n(t - \tau) Q'_{n-1}(\tau) d\tau, \quad (4.17)$$

где $Q_1(t) = q_1(t)$, $q_i(t) = \mathbf{P}\{T_i < t\}$.

Последовательное применение этой формулы позволяет получить вероятность отказа системы для заданного n .

Среднее время жизни системы равно

$$\bar{T}_n = \mathbf{E}T_n = \sum_{i=1}^n \mathbf{E}T_i. \quad (4.18)$$

Приведем результаты применения формулы (4.17) для случая, когда ВБР элементов системы подчиняются экспоненциальному закону т.е. $P_i(t) = e^{-\lambda_i t}$, $i = \overline{1, n}$.

В случае одинаковых элементов, т.е. $\lambda_i = \lambda$, $i = \overline{1, n}$, будем иметь

$$Q_n(t) = e^{-\lambda t} \sum_{i=0}^{n-1} \frac{\lambda^i t^i}{i!}, \quad \bar{T}_n = \mathbf{E}T_n = \frac{n}{\lambda}. \quad (4.19)$$

В общем случае для различных λ_i получим

$$\begin{aligned}
Q_n(t) = & \frac{\lambda_2 \lambda_3 \cdots \lambda_n e^{-\lambda_1 t}}{(\lambda_2 - \lambda_1)(\lambda_3 - \lambda_1) \cdots (\lambda_n - \lambda_1)} + \\
& + \frac{\lambda_1 \lambda_3 \cdots \lambda_n e^{-\lambda_2 t}}{(\lambda_1 - \lambda_2)(\lambda_3 - \lambda_2) \cdots (\lambda_n - \lambda_2)} + \\
& + \frac{\lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_{i-1} \lambda_{i+2} \cdots \lambda_n e^{-\lambda_i t}}{(\lambda_1 - \lambda_i) \cdots (\lambda_{i-1} - \lambda_i)(\lambda_{i+1} - \lambda_i) \cdots (\lambda_n - \lambda_i)} + \\
& + \frac{\lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_{n-1} e^{-\lambda_n t}}{(\lambda_1 - \lambda_n)(\lambda_2 - \lambda_n) \cdots (\lambda_{n-1} - \lambda_n)},
\end{aligned} \tag{4.20}$$

$$\bar{T}_n = \mathbf{E}T_n = \sum_{i=1}^n \frac{1}{\lambda_i}.$$

Так же как и в случае нагруженного резерва, вероятность безотказной работы системы с ненагруженным резервом не подчиняется экспоненциальному закону.

РЕФЛЕКСИЯ.

Вопрос.

1. Удалось ли после прочтения текста ответить на какие-либо вопросы? Какие?
2. Задание в группы. В группе обсудите и отметьте вопросы, на которые удалось получить ответ. Зачитайте их. Преподаватель фиксирует ответы на доске в таблице.

Часть 2. Сравнение систем с нагруженным и ненагруженным резервами с точки зрения надежности.

ВЫЗОВ.

2.1. Вопросы.

1. Какая система более выигрышная с точки зрения надежности?
2. Какие величины необходимо сравнивать, чтобы получить однозначный ответ?

Фронтальное обсуждение.

ОСМЫСЛЕНИЕ

Чтение текста.

Сравнение систем с нагруженным и ненагруженным резервами с точки зрения надёжности.

Выполним сравнение систем с нагруженным и ненагруженным резервами с точки зрения надёжности.

Обозначим через $\{T_i\}$, $i = \overline{1, n}$ – случайные величины, равные времени до отказа элементов системы. Случайное время работы системы с нагруженным резервом равно $T_{n1} = \max\{T_i\}$, $i = \overline{1, n}$, а системы с ненагруженным резервом - $T_{n2} = \sum_{i=1}^n T_i$. Очевидно, что $T_{n1} \leq T_{n2}$ т.е. система с ненагруженным резервом выгоднее системы с нагруженным резервом.

Получим количественную оценку выигрыша системы с ненагруженным резервом по сравнению с системой с нагруженным резервом. Представим приближённую формулу (4.9) для системы с ненагруженным резервом в виде

$$Q_{n2}(t) \approx \frac{1}{n!} \prod_{i=1}^n Q_i(t),$$

что возможно в силу справедливости приближенного соотношения $\mu_i t \approx 1 - \exp(-\mu_i t) = Q_i(t)$ в случае если $\mu_i t$ мало.

Применяя полученное приближенное выражение для величины $Q_{n2}(t)$ и формулу (4.5) для $Q_{n1}(t)$ получим

$$\alpha = Q_{n1}(t) / Q_{n2}(t) \approx n!$$

т.е. при переходе к системе с ненагруженным резервом вероятность отказа уменьшается в $n!$ раз.

Пусть ВБР элементов, входящих в систему с ненагруженным резервом, описываются экспоненциальным законом $P_i(t) = e^{-\lambda_i t}$. Считая, что все элементы одинаковы, т.е. $\lambda_i = \lambda$, можем найти согласно (4.6) величину среднего времени до отказа для систем с нагруженным резервом $\bar{T}_{n1} = \bar{t} \cdot \sum_{i=1}^n \frac{1}{i} \approx \bar{t}(\ln n + c)$, и согласно (4.19) с ненагруженным резервом $\bar{T}_{n2} = n\bar{t}$. Отсюда следует $\beta = \bar{T}_{n1} / \bar{T}_{n2} \approx (\ln n + c) / n$.

Например, при дублирование имеем $n = 2 - \beta \approx 1,3$, $\alpha = 2$, а при многократном резервировании - $n = 10 - \beta \approx 3,4$, $\alpha = 3628800$. Таким образом, чем больше кратность резервирования, тем значительнее преимущества системы с ненагруженным резервом.

Однако подчеркнём, что преимущества систем с ненагруженным резервом легко утрачиваются т.к. ВБР переключающего устройства меньше единицы.

С этой целью рассмотрим систему, состоящую из основного и одного резервного элементов, и найдем ВБР для $t = 10$ час. Примем, что для обоих элементов $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda = 0,01$ час⁻¹. Тогда согласно (4.8) ВБР для системы с ненагруженным резервом получим

$$P(t) = e^{-\lambda t} + e^{-\lambda t} \cdot \lambda t = 0,995324,$$

а ВБР для системы с нагруженным резервом согласно (4.5) равна 0,990945.

Если в системе с ненагруженным резервом имеется переключающий элемент и его ВБР определяется функцией $P_*(t)$, то ВБР системы определится

$$P(t) = e^{-\lambda t} + P_*(t)e^{-\lambda t} \cdot \lambda t. \quad (4.21)$$

Тогда при $P_*(t=10) = 0,99$ будем иметь $P(t=10) = 0,99441$, а при $P_*(t=10) = 0,9$ – $P(t=10) = 0,98627$.

Отметим, что предположение о том, что интенсивности отказов резервного и основного элементов равны, скорее является исключением, чем правилом. Обычно резервные элементы имеют меньшую надежность, чем основные.

Рассмотрим вышеприведенный пример, предполагая, что λ_1 – интенсивность отказа основного, а λ_2 – резервного элементов. Считаем также, что подключение резервного элемента происходит мгновенно. Для определения ВБР можно воспользоваться формулой (4.20), но для наглядности применим соотношение (4.17). Пусть основной элемент отказал в момент t_1 , а резервный элемент в момент $t_2 = t - t_1$. Здесь время работы резервного элемента t_2 отсчитывается от момента t_1 отказа основного элемента. Очевидно, что величины t_1, t_2 являются случайными величинами. Для основного элемента функция распределения времени до отказа имеет вид $f_1(t_1) = \lambda_1 e^{-\lambda_1 t_1}$, а для резервного – $f_2(t_2) = \lambda_2 e^{-\lambda_2(t-t_1)}$. Вероятность отказа первого элемента на интервале $(t_1, t_1 + dt_1)$ равна $\lambda_1 e^{-\lambda_1 t_1} dt_1$, а второго – $\lambda_2 e^{-\lambda_2(t-t_1)} dt$.

Вероятность отказа системы на интервале $(t, t + dt)$ с учетом независимости отказов элементов равна $\lambda_1 \lambda_2 e^{-\lambda_1 t_1} e^{-\lambda_2(t-t_1)} dt$.

Интегрируя по t_1 , получим совместную функцию плотности распределения времени до отказа системы из двух элементов

$$f(t) = \int_0^t f_1(t_1) f_2(t_2) dt_1 = \lambda_1 \lambda_2 \left(\frac{e^{-\lambda_1 t}}{\lambda_2 - \lambda_1} + \frac{e^{-\lambda_2 t}}{\lambda_1 - \lambda_2} \right). \quad (4.22)$$

ВБР системы получим из соотношения

$$P(t) = \int_t^\infty f(t) dt = e^{-\lambda_1 t} + \frac{\lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1} (e^{-\lambda_1 t} - e^{-\lambda_2 t}).$$

Средняя наработка равна $\bar{T} = \frac{1}{\lambda_1} + \frac{1}{\lambda_2}$.

В случае, когда переключающее устройство не абсолютно надёжно с учётом (4.22) будем иметь

$$P(t) = e^{-\lambda_1 t} + P_*(t) \frac{\lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1} (e^{-\lambda_1 t} - e^{-\lambda_2 t}), \quad (4.23)$$

где $P_*(t)$ ВБР переключающего элемента.

РЕФЛЕКСИЯ.

1. Задание в группы. Вам в группы выданы таблицы. Заполните их, вписывая формулы. Дайте аргументированный ответ на вопрос: какая система более выигрышная с точки зрения надёжности и почему?

| Система/Параметры | Среднее время до отказа | ВБР системы | Выигрыш системы | Комментарии |
|--------------------------|-------------------------|-------------|-----------------|-------------|
| С нагруженным резервом | | | | |
| С ненагруженным резервом | | | | |

Вывод:

2. Презентация таблиц. Общее обсуждение полученных выводов.

3.Задание.

Каждая группа должна ответить письменно на вопросы 5, 6, 11, 12, 13 списка и ответы сдать преподавателю.

Часть 3.

Решение задач

Задача 1.

Дана система, состоящая из одного основного и одного ненагруженного резервного элементов. ВБР элементов подчиняются экспоненциальному закону с параметром $\lambda = 10^{-4} \text{сек}^{-1}$. Найти параметры элементов системы из двух параллельных нагруженных элементов из условия равенства ВБР для

$t = 10^2$ сек . ВБР элементов искомой системы подчиняются экспоненциальному закону

Задача 2.

Решить задачу 1 в предположении о том, что исходная система состоит из одного основного и двух резервных ненагруженных элементов

Занятие 18.

Применение формулы Байеса при расчёте надёжности систем

ВЫЗОВ.

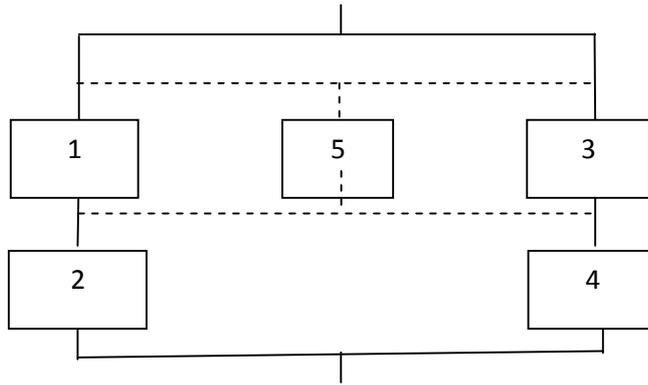
1. Вопрос.

Пользуясь логико-вероятностными методами для оценки надёжности, мы оценивали надёжность различных систем. Каких конкретно систем? (С последовательным соединением, параллельным соединением/нагруженным резервом, параллельным соединением/ ненагруженным резервом).

2. Задание в группы. Обобщите результаты в таблице.

| Системы | Методы оценки надёжности | Используемые показатели надёжности элементов | Комментарии |
|---|--------------------------|--|-------------|
| С последовательным соединением | | | |
| С параллельным соединением/ нагруженным резервом | | | |
| С параллельным соединением/ ненагруженным резервом | | | |

3. Презентация у доски с общим обсуждением.



4. Вопросы

1. Существуют ли системы, структурные схемы которых не могут быть сведены к комбинации последовательно и параллельно соединенных элементов? Придумайте пример
2. Как оценить надежность системы, структурная схема которой не может быть сведена к комбинации последовательно и параллельно соединенных элементов? (Рисунок выше). Ваши предложения. Общее обсуждение

ОСМЫСЛЕНИЕ.

Чтение текста (индивидуально)

Применение формулы Байеса при расчёте надёжности систем

Для систем, которые имеют более сложную структуру, чем комбинация последовательного и параллельного соединений элементов применяются другие методы оценки ВБР. В частности широко используется частный случай формулы Байеса – формула полной вероятности:

$$P(X) = \sum_{i=1}^n P(H_i)P(X | H_i), \quad (4.24)$$

здесь $\{H_i\}, i = \overline{1, n}$ – полная группа событий.

Формула полной вероятности дает один из наиболее мощных методов оценки ВБР сложных систем.

При использовании формулы полной вероятности для расчёта ВБР системы выбирается определённая группа элементов структурной схемы и формируются гипотезы о том, что происходит с этой группой элементов в течение заданной наработки. В каждой из гипотез учитывается, что для любого элемента рассматриваемой группы возможными исходами являются либо безотказная работа, либо отказ.

При вычислении условной вероятности безотказной работы системы при гипотезе H_i предполагается, что произошли соответствующие события (безотказная работа или отказ одного или нескольких элементов) и рассматриваются соответствующие структурные схемы.

Выразим формулу (4.24) в терминах теории надёжности для $n = 2$. Обозначим через X – событие, соответствующее отказу системы, через H_1 и H_2 соответственно безотказную работу и отказ некоторого элемента, от которого зависит работоспособность системы. Тогда можем записать: вероятность отказа системы равна вероятности отказа системы при условии, что некоторый выделенный элемент работоспособен, умноженной на вероятность того, что этот элемент исправен, плюс вероятность отказа системы при условии, что тот же самый элемент неработоспособен, умноженной на вероятность того, что этот элемент неработоспособен, т.е. $P(\text{отказа системы}) = P(\text{отказа системы при работоспособном элементе } X) \times P(\text{элемент } X \text{ – работоспособен}) + P(\text{отказ системы при неработоспособном элементе } X) \times P(\text{элемент } X \text{ неработоспособен})$.

В качестве примера использования формулы Байеса (4.24) рассмотрим расчет ВБР системы, структурная схема которой приведена на рис. 4.5

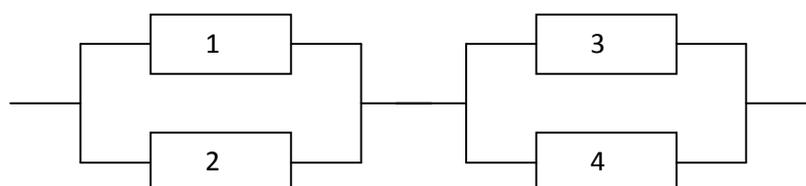


Рис. 4.5. Структурная схема с последовательным и параллельным соединением элементов

Выберем группу элементов, состоящую из первого и третьего элементов. Для них возможна следующая полная группа из четырёх событий, т.е. $n = 4$: оба элемента работоспособны; первый элемент работоспособен, третий отказал; первый отказал, третий работоспособен; оба элемента неработоспособны.

Обозначим через X – событие, соответствующее безотказной работе системы, знаком 1 – работоспособные состояния элементов, знаком 0 – неработоспособные состояния. В табл. 4.2 определены составляющие формулы полной вероятности (4.24)

Таблица 4.2

Составляющие формулы полной вероятности

| Событие | Элементы | | $P(H_i)$ | $P(X H_i)$ |
|---------|----------|---|---------------------------|------------|
| | 1 | 3 | | |
| H_1 | 1 | 1 | $P_1 P_3$ | 1 |
| H_2 | 0 | 1 | $(\bar{P}_1) P_3$ | P_2 |
| H_3 | 1 | 0 | $P_1 (\bar{P}_2)$ | P_4 |
| H_4 | 0 | 0 | $(\bar{P}_1) (\bar{P}_2)$ | $P_2 P_4$ |

После подстановки данных из табл. 4.2 в формулу (4.24) получим ВБР системы

$$P(t) = P_1(t)P_3(t) + P_2(t)P_3(t) + P_1(t)P_4(t) + P_2(t)P_4(t) - P_1(t)P_2(t)P_3(t) + \\ + P_1(t)P_3(t)P_4(t) + P_1(t)P_2(t)P_4(t) + P_2(t)P_3(t)P_4(t) + P_1(t)P_2(t)P_3(t)P_4(t).$$

Данную формулу можно получить путем применения формул (4.1) и (4.5) для последовательного соединения двух подсистем с параллельно соединёнными элементами.

На рис. 4.6 приведена структурная схема, которая не может быть сведена к комбинации последовательно и параллельно соединённых элементов.

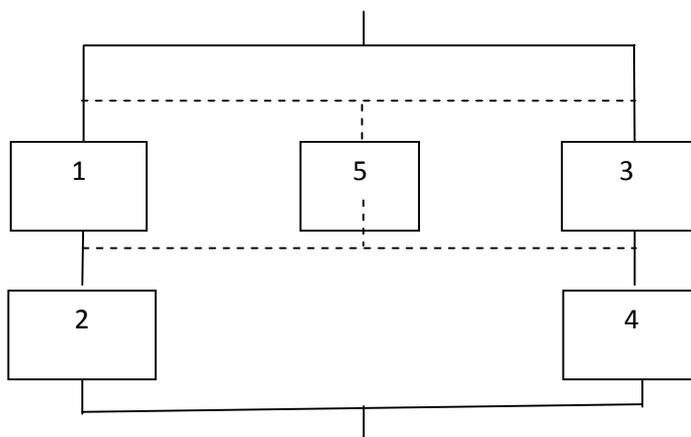


Рис. 4.6. Структурная схема, не сводящаяся к комбинации последовательно и параллельно соединённых элементов.

Система из двух последовательно соединенных элементов 1 и 2 дублирована аналогичной системой из элементов 3 и 4. Кроме того предусмотрен дополнительный элемент 5, являющийся дублирующим или для элемента 1, или для элемента 3. Таким образом, система будет работоспособной в следующих комбинациях: 12, 34, 52 и 54

Применим формулу (4.24) для нахождения ВБР данной сложной системы. С этой целью выберем группу элементов, состоящую из одного элемента 5. В этом случае полная группа событий состоит всего из двух событий: H_1 – элемент 5 работоспособен и H_2 – элемент 5 неработоспособен. Формула (4.24) примет вид

$$Q(t) = P_5 Q_2 Q_4 + Q_5 (1 - P_1 P_2) (1 - P_3 P_4),$$

или для ВБР

$$P(t) = 1 - P_5 (1 - P_1) (1 - P_2) + (1 - P_5) (1 - P_1 P_2) (1 - P_3 P_4).$$

Для систем, имеющих большое количество элементов, целесообразно, использовать формулу полной вероятности в несколько этапов.

РЕФЛЕКСИЯ.

1. Вопрос.

1.1. В чем суть данного подхода к оценке надежности?

1.2. Каков алгоритм применения формулы Байеса? Общее обсуждение.

2. Задание в группы.

Заполнить таблицу «Сравнение методов расчета надежности».

Сравнение методов расчета надежности

| Метод | В каких случаях применяется | Допущения при расчетах | Достоинства | Комментарии |
|----------------------------|-----------------------------|------------------------|-------------|-------------|
| «Схема гибели» | | | | |
| Формула Байеса | | | | |
| Формула теории вероятности | | | | |

3. Презентация у доски.

4. Задание в группы.

4.1. Вам в пару выдана задача. Для решения примените поочередно известные вам 3 метода расчета надежности систем.

4.2. Вторая пара в вашей группе решала другую задачу. Обсудите в группе решение задач, полученные результаты, сделайте выводы.

Задача 1. Применить формулу полной вероятности для расчета системы, состоящей из двух одинаковых последовательно соединенных элементов.

Задача 2. Применить формулу полной вероятности для расчета системы, состоящей из двух одинаковых параллельно соединенных элементов.

5. Презентация у доски.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Данное пособие предназначено для обучения студентов магистратуры в соответствии с ФГОС по направлениям подготовки 010800 «Механика и математическое моделирование», 010400 «Прикладная математика и информатика»

Предложенный вариант организации обучения способствует реализации требований ФГОС третьего поколения так как:

- более 80 % занятий курса разработаны в технологии развития критического мышления в активных и интерактивных формах;
- значительно увеличена доля самостоятельной работы студентов:
- - аудиторная, индивидуальная и групповая работа по освоению нового материала велась по заданиям для самостоятельного выполнения;
- для компетентностного подхода характерен перенос акцента с управления, контроля и оценки, осуществляемых преподавателем, на самоуправление, самоконтроль и самооценку учебной деятельности обучаемого, преподаватель должен, прежде всего, создавать условия и атмосферу для самостоятельной деятельности студентов, его доминирующая роль уступает место позиции равноправного участника образовательного процесса;
- обучение проводилось в технологии развития критического мышления, что способствовало знакомству студентов с образовательной технологией, которая:
- - имеет богатый арсенал приёмов и стратегий,
- - позволяет организовывать занятия в активных и интерактивных формах,
- - характеризуется особой позицией преподавателя, описанной выше,
- - обуславливает именно аутентичную оценку освоения ООП.

Литература

1. Арасланов А.М. Расчёт элементов конструкций заданной надёжности при случайных воздействиях – М.: Машиностроение, 1987. -128 с.
2. Базовский И. Надёжность. Теория и практика (пер. с англ.) - М.: Мир, 1965. -375 с..
3. Болотин В.В. Методы теории вероятностей и теории надёжности в расчётах сооружений - М.: Стройиздат, 1981. -351 с.
4. Болотин В.В. Ресурс машин и конструкций - М.: Машиностроение, 1990. -448 с.
5. Герцбах И.Б., Кордонский Х.Б. Модели отказов - М.: Советское радио, 1966. -167 с.
6. Гнеденко Б.В., Беляев Ю.К., Соловьёв А.Д. Математические методы в теории надёжности- М.: Наука, 1965. -524 с.
7. ГОСТ 27 002-89. Надёжность и эффективность в технике – М.: Из-во стандартов, 1990.- 35 с.
8. Гусев А.С. Сопротивление усталости и живучесть конструкций при случайных нагрузках – М.: Машиностроение, 1989. -248 с.
9. Дружинин Г.В. Надёжность автоматизированных систем. М., Энергия, 1977. -536 с.
10. Зорин В.А., Любимов А.К. Асимптотические оценки функции надёжности и первых моментов ресурса для объектов с учётом процесса накопления повреждений//Прикладные проблемы прочности и пластичности. Межвуз. сб. / Нижегородский ун-т. 1992. Вып. 50. С. 76-82.
11. Любимов А.К. Механика разрушения и надёжность конструкций. Учебное пособие – Горьк. ун-т; Горький. 1989. -96 с.
12. Надёжность и эффективность в технике. Справочник в 10 т. Ред. совет: Авдеевский (пред.) и др. Т.2. Математические методы в теории надёжности и эффективности/Под ред. Б.В. Гнеденко – М.: Машиностроение, 1987.- 367 с. 13. Надёжность технических систем. Справочник/Ю.К. Беляев, В.А. Богатырев, В.В. Болотин и др.; Под ред. И.А. Ушакова- М.: Радио и связь, 1985. -608 с.
14. Проников А.С. Надёжность машин - М.: Машиностроение, 1978. 592 с.
15. Райншке К. Модели надёжности и чувствительности систем (пер. с немецкого) – М.: Мир. 1979. -456 с.
16. Решетов Д.Н., Иванов А.С., Фадеев В.З. Надёжность машин. Учебное пособие- М.: Высш. шк., 1988. -238 с.
17. Сборник задач по теории надёжности. Под ред. А.М. Половко, И.М. Маликова – М.: Изд-во Советское радио, 1972. -408 с.